Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(4), 2009-2016
Published Online April 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.114217

倒数距离无符号拉普拉斯极值图

程美姣

浙江师范大学数学与计算机科学学院，浙江 金华

收稿日期：2022年3月22日；录用日期：2022年4月16日；发布日期：2022年4月24日

摘 要

给定图 G 是简单无向连通图，$RD(G)$ 表示图 G 的 **Harary** 矩阵，也称为图 G 的倒数距离矩阵。图 G 的倒数距离无符号拉普拉斯矩阵定义为 $RQ(G) = RT(G) + RD(G)$，其中 $RT(G)$ 表示图 G 的倒数距离传递度对角矩阵。第二部分刻画了具有固定点数和固定点连通度且有最大倒数距离无符号拉普拉斯谱半径的极值图。第三部分刻画了具有固定点数和固定边连通度且有最大倒数距离无符号拉普拉斯谱半径的极值图。

关键词

倒数距离无符号拉普拉斯矩阵，谱半径，连通度

The Extremal Graph of the Reciprocal Distance Signless Laplacian Matrix

Meijiao Cheng

College of Mathematics and Computer Science, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Mar. 22^{nd}, 2021; accepted: Apr. 16^{th}, 2022; published: Apr. 24^{th}, 2022

Abstract

Graph G is a simple undirected connected graph, $RD(G)$ represents the Harary matrix

文章引用: 程美姣. 倒数距离无符号拉普拉斯极值图[J]. 应用数学进展, 2022, 11(4): 2009-2016.
DOI: 10.12677/aam.2022.114217

of graph G, which is also the reciprocal distance matrix of graph G. The reciprocal distance signless Laplacian matrix of graph G is defined as $RQ(G) = RT(G) + RD(G)$, where $RT(G)$ represents the reciprocal distance transitivity diagonal matrix of G. The second part describes the extremal graphs with maximal spectral radius of the $RQ(G)$ among all connected graphs of fixed order and fixed vertex connectivity. The third part characterizes the extremal graphs with maximal spectral radius of the $RQ(G)$ among all connected graphs of fixed order and fixed edge connectivity.

Keywords

Reciprocal Distance Signless Laplacian Matrix, Spectral Radius, Connectivity

1. 引言

本文考虑的所有图都是简单无向连通图. 图 G 是点集为 $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 边集为 $E(G)$ 的 n 阶连通图. 用 v_iv_j 表示点 v_i 与 v_j 在图 G 中的边, 此时称点 v_i 和 v_j 相邻接且称点 v_i 或 v_j 与该边 v_iv_j 相关联. 若对于 n 个点的图 G 中任意两个点均邻接, 则称图 G 为完全图, 用 K_n 表示. 若点 $v \in V(G)$, 图 G 中与点 v 关联的边的数量称为点 v 的度, 记为 $d_G(v)$. 图 G 的最小度记为 $\delta(G)$. 若图有点集 $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 边集 $E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-1}v_n\}$, 则称图为路, 用 P_n 表示. 图 G 中两点的距离 $d_G(v_i, v_j)$ 表示图中点 v_i 和点 v_j 间最短路的长度, 简记为 d_{ij}.

Plavsić 等人在文 [1] 中介绍了图 G 的 Harary 矩阵也即倒数距离矩阵 $RD(G) = (RD_{ij})_{n\times n}$, 定义为:

$$RD_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{d_G(v_i,v_j)}, & \text{若 } i \neq j, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

图 G 中点 v_i 的倒数传递度 $RTr_G(v_i)$ 定义为点 v_i 到图 G 中除 v_i 外所有点的距离倒数之和, 也即 $\sum_{v_j \in V(G)\setminus\{v_i\}} \frac{1}{d_{ij}}$. 令 n 阶方阵 $RT(G)$ 表示图 G 的点倒数传递度对角矩阵, 其中对角元素 $RT_{i,i}(G)$ 定义为点 v_i 的倒数传递度 $RTr_G(v_i)$. 文 [2] 中介绍了图的倒数距离无符号拉普拉斯矩阵 $RQ(G) = RT(G) + RD(G)$. 图 G 对应倒数距离无符号拉普拉斯矩阵的所有特征值定义为图 G 倒数距离无符号拉普拉斯谱, 记为 $\sigma(RQ(G)) = \{\lambda_1(RQ(G)), \lambda_2(RQ(G)), \ldots, \lambda_n(RQ(G))\}$, 其中 $\lambda_1(RQ(G)) \geq \lambda_2(RQ(G)) \geq \cdots \geq \lambda_n(RQ(G))$. 图 G 倒数距离无符号拉普拉斯谱半径, 即 $\rho(RQ(G)) = \lambda_1(RQ(G))$. 近年来, 倒数距离矩阵受到广泛研究. 文 [2,3]给出了图的倒数距离无符号

拉普拉斯矩阵谱半径的上下界. Su 等在文 [4]中刻画了具有 n 个点且分别有固定点连通度, 边连通度, 色数和独立数的图类中具有最大倒数距离谱半径的极值图. Huang 等人在文 [5]中确定了 n 个点且分别有固定匹配度, 固定匹配度的二部图, 和具有固定割边数的图类中具有最大倒数距离谱半径的极值图. 类似的, 本文考虑研究具有 n 个点且分别有固定点连通度, 边连通度的图类中具有最大倒数距离无符号拉普拉斯谱半径的极值图.

2. 具有固定点连通度的倒数距离无符号拉普拉斯极值图

给定图 $G=(V(G),E(G))$ 是具有 n 个点的连通图, 在图 G 去掉任意 $k-1$ 个点后所得的子图连通, 去掉 k 个点后所得子图不连通, 则称 k 为图 G的点连通度, 记为 $\kappa(G)$. 若 S 是点集 $V(G)$ 中的一个非空真子集, $\overline{S}=V(G)\backslash S$. 边集 $E(G)$ 中满足一个端点在点集 S 中, 另一个端点在 $\overline{S}$ 中的边的集合定义为割边集, 记为 $[S,\overline{S}]$. 若图 G 的一个割边集中有 k 条边, 则称该边割集为 k-边割. 图 G 所有边割中最小边数为图 G 的边连通度, 记为 $\kappa'(G)$. 根据已有结果可知图 G 的点连通度, 边连通度, 最小度满足 $\kappa(G)\le\kappa'(G)\le\delta(G)$. 所有点连通度为 r 的具有 n 个点的图集合记为 G_n^r, 所有边连通度为 r 的具有 n 个点的图集合记为 $\overline{G}_n^r$. 易知, $G_n^{n-1}=\overline{G}_n^{n-1}=K_n$.

矩阵 $RQ(G)$ 表示图 G 的距离倒数无符号拉普拉斯矩阵, 对于任意 n 维列向量 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$, 有

$$\mathbf{x}^T RQ(G)\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n} RTr_G(v_i){x_i}^2+2\sum_{1\le i<j\le n}\frac{1}{d_G(v_i,v_j)}x_ix_j. \tag{1}$$

那么, 有

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^T RQ(G')\mathbf{x}-\mathbf{x}^T RQ(G)\mathbf{x}=&\sum_{i=1}^{n}(RTr_{G'}(v_i)-RTr_G(v_i)){x_i}^2\\&+2\sum_{1\le i<j\le n}(\frac{1}{d_{G'}(v_i,v_j)}-\frac{1}{d_G(v_i,v_j)})x_ix_j.\end{aligned} \tag{2}$$

定理 1 图 G 是 n 阶连通图. 图 $\widetilde{G}=G+e$, 其中 $e\notin E(G)$. 此时有

$$\lambda_i(RQ(\widetilde{G}))\ge\lambda_i(RQ(G)),\ \ 其中\ \ 1\le i\le n. \tag{3}$$

证明 对于图 G 中任意两点 u 和 v, 有 $d_{\widetilde{G}}(u,v)\le d_G(u,v)$, 也即 $\frac{1}{d_{\widetilde{G}}(u,v)}\ge\frac{1}{d_G(u,v)}$. 根据图 G 与图 G' 距离倒数无符号拉普拉斯矩阵之间的关系可得： $RQ(\widetilde{G})=RQ(G)+M$, 其中

$$M=\begin{pmatrix} m_1 & m_{1,2} & \cdots & m_{1,n}\\ m_{2,1} & m_2 & \cdots & m_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ m_{n,1} & m_{n,2} & \cdots & m_n\end{pmatrix}$$

且有 $m_i=\sum_{j=1,j\ne i}^{n} m_{i,j}$. 易见, 矩阵 M 是对角占优矩阵. 故有 M 的最小特征值 $\lambda_n(M)$ 大于或等于零. 根据 Weyl's 不等式 [6], 可知 $\lambda_i(RQ(\widetilde{G}))\ge\lambda_i(RQ(G))+\lambda_n(M)$. 即有 $\lambda_i(RQ(\widetilde{G}))\ge\lambda_i(RQ(G))$

成立, 其中 $1 \le i \le n$. □

定理 2 令 n 和 r 是满足 $1 \le r \le n-2$ 的正整数. 则图 $K_r \vee (K_1 \cup K_{n-r-1})$ 是具有 n 个点, 点连通度为 r 的图类 G_n^r 中具有最大距离倒数无符号拉普拉斯矩阵谱半径的图.

证明 假设图 G 是图集 $G \in G_n^r$ 中具有最大倒数距离无符号拉普拉斯谱半径的图. 由定理 1 可知图 G 同构于 $K_r \vee (K_{n_1} \cup K_{n_2})$, 其中 $n_1 + n_2 = n - r$. 不失一般性, 假设 $1 \le n_1 \le n_2$.

利用反证法, 假设 $n_1 > 1$. 令 $\mathbf{x}$ 是矩阵 $RQ(G)$ 对应于谱半径 $\rho(RQ(G))$ 的 perron 向量, 且有 $\|\mathbf{x}\| = 1$ 成立. 由图 $G = K_r \vee (K_{n_1} \cup K_{n_2})$, 可知矩阵 $RQ(G)$ 的 perron 向量:

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = (\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{n_1}, \underbrace{x_2, \ldots, x_2}_{n_2}, \underbrace{x_3, \ldots, x_3}_{r}).$$

令 v_1 是图 G 子图 K_{n_1} 中的点. 构造新图 G':

$$G' = G - \bigcup_{v_i \in V(K_{n_1}) \backslash \{v_1\}} v_1 v_i + \bigcup_{v_j \in V(K_{n_2})} v_1 v_j.$$

易见图 $G' = K_r \vee (K_{n_1-1} \cup K_{n_2+1})$. 此时, 有

$$\rho(RD_\alpha(G') - \rho(RD_\alpha(G)) \ge \mathbf{x}^T RD_\alpha(G')\mathbf{x} - \mathbf{x}^T RD_\alpha(G)\mathbf{x}.$$

根据式 (2) 可知, 要讨论图 G 到图 G 谱半径的变化情况, 需讨论 $\forall v_i, v_j \in V(G)$, $\frac{1}{d_{G'}(v_i,v_j)} - \frac{1}{d_G(v_i,v_j)}$ 和 $RTr_{G'}(v_i) - RTr_G(v_i)$ 的值. 除下列讨论外, $\frac{1}{d_{G'}(v_i,v_j)} - \frac{1}{d_G(v_i,v_j)}$ 和 $RTr_{G'}(v_i) - RTr_G(v_i)$ 的值为零.

1) 对于任意 $v_i \in V(K_{n_1}) \backslash \{v_1\}$, 有 $\frac{1}{d_{G'}(v_1,v_i)} - \frac{1}{d_G(v_1,v_i)} = -\frac{1}{2}$;

2) 对于任意 $v_j \in V(K_{n_2})$, 有 $\frac{1}{d_{G'}(v_1,v_j)} - \frac{1}{d_G(v_1,v_j)} = \frac{1}{2}$;

3) $RTr_{G'}(v_1) - RTr_G(v_1) = \frac{n_2-(n_1-1)}{2}$;

4) 对于任意 $v_i \in V(K_{n_1}) \backslash \{v_1\}$, 有 $RTr_{G'}(v_i) - RTr_G(v_i) = -\frac{1}{2}$;

5) 对于任意 $v_j \in V(K_{n_2})$, 有 $RTr_{G'}(v_j) - RTr_G(v_j) = \frac{1}{2}$.

根据上述讨论结合式 (2), 有

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^T RQ(G')\mathbf{x} - \mathbf{x}^T RQ(G)\mathbf{x} =& [\frac{n_2-(n_1-1)}{2} x_1^2 - \frac{(n_1-1)}{2} x_1^2 + \frac{n_2}{2} x_2^2] \\ &+ [n_2 x_1 x_2 - (n_1-1) x_1^2] \\ =& \frac{n_2}{2}(x_1+x_2)^2 - 2(n_1-1)x_1^2.\end{aligned}$$

若要判断上式与零的大小关系, 需确定 x_1 与 x_2 的关系. 方便起见, 令$\rho = \rho(RQ(G))$. 根据 $RQ(G)\mathbf{x} = \rho\mathbf{x}$ 可得:

$$\rho x_1 = (n - 1 - \frac{n_2}{2})x_1 + [(n_1-1)x_1 + \frac{n_2}{2}x_2 + r x_3],$$

和

$$\rho x_2 = (n-1-\frac{n_1}{2})x_2 + [\frac{n_1}{2}x_1 + (n_2-1)x_2 + rx_3].$$

故有

$$(\rho - n - n_1 + 2 + \frac{n_1+n_2}{2})x_1 = rx_3 + \frac{n_1}{2}x_1 + \frac{n_2}{2}x_2,$$

和

$$(\rho - n - n_2 + 2 + \frac{n_1+n_2}{2})x_2 = rx_3 + \frac{n_1}{2}x_1 + \frac{n_2}{2}x_2.$$

根据上述两个公式等号右边相等, 易见

$$((\rho - n - n_1 + 2 + \frac{n_1+n_2}{2})x_1 = (\rho - n - n_2 + 2 + \frac{n_1+n_2}{2})x_2. \tag{4}$$

由Perron-Frobenius定理, 对应于矩阵$RQ(G)$谱半径的perron向量所有元素都大于零, 即x_1, x_2, x_3大于零. 故$rx_3 + \frac{n_1}{2}x_1 + \frac{n_2}{2}x_2 > 0$, 此时可得$(\rho - n - n_1 + 2 + \frac{n_1+n_2}{2}) > 0$ 和$(\rho - n - n_2 + 2 + \frac{n_1+n_2}{2}) > 0$. 由 $n_2 \geq n_1$, 结合式 (4) 可得 $\frac{x_2}{x_1} \geq 1$. 故有

$$\frac{n_2}{2}(x_1+x_2)^2 - 2(n_1-1)x_1^2 \geq \frac{n_2}{2}(2x_1)^2 - 2(n_1-1)x_1^2 = 2(n_2-n_1+1)x_1^2 > 0,$$

即有 $\rho(RQ(G')) > \rho(RQ(G))$, 与假设矛盾. 综上所述可得 $n_1 = 1$, 图 $G = K_r \vee (K_1 \cup K_{n-r-1})$ 是图类 G_n^r 中具有最大距离倒数无符号拉普拉斯矩阵谱半径的图. □

3. 具有固定边连通度的倒数距离无符号拉普拉斯极值图

下面刻画边连通度为 r 的 n 阶图 G 中具有最大距离倒数无符号拉普拉斯矩阵谱半径的极值图.

引理 3 [7] 令点集 S 是包含图 G 中最小度点的非空真子集. 若 $\left|[S,\overline{S}]\right| < \delta(G)$, 则有 $|S| > \delta(G)$.

定理 4 令 n 和 r 是满足 $1 \leq r \leq n-2$ 的正整数, 则图 $K_r \vee (K_1 \cup K_{n-r-1})$ 是图类 $\overline{G}_n^r$ 中唯一具有最大倒数距离无符号拉普拉斯谱半径的图.

证明 假设图 G 是图集 $G \in \overline{G}_n^r$ 中具有最大倒数距离无符号拉普拉斯谱半径的图. 若 $\delta(G) < r$, 则定有 $\kappa'(G) \geq r$. 故有 $\delta(G) \geq r$. 若图 G 满足 $\delta(G) = r$, 则 $[\{v\}, V(G)\backslash\{v\}]$ 是图 G 的 r-边割. 由定理 1 可知, 诱导子图 $G[V(G)\backslash\{v\}]$ 是完全图. 此时图 $G = K_r \vee (K_1 \cup K_{n-r-1})$.

假设 $\delta(G) > r$. 若图 G 的 r-边割为 $[S,\overline{S}]$, 其中 $|S| = n_1$, $|\overline{S}| = n_2$. 图 $G_1 = G[S]$ 与 $G_2 = G[\overline{S}]$ 分别表示由点集 S 和 $\overline{S}$ 诱导的子图. 由定理 1 可知图 G_1 和 G_2 都是完全图. 因为 $\delta(G) > r$, 故有 $n_1, n_2 > 1$. 假设 $V(G_1) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n_1}\}$, $V(G_2) = \{v_{n_1+1}, v_{n_1+2}, \ldots, v_n\}$. 令 $\mathbf{x} = (x_1, x_2 \ldots, x_{n_1}, x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \ldots, x_n)$ 是图 G 距离倒数无符号拉普拉斯矩阵 $RD_\alpha(G)$ 的 Perron 向量, 其中 x_i 是对应于图 G 中点 v_i 的元素. 不失一般性, 令 $x_1 = \min_{1\leq i\leq n}\{x_i\}$, $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{n_1}$. 设图 G 中点 v_1 与点集 $\overline{S}$ 中 t 个点相邻接. 易见 $t \leq \min\{r, n_2\}$.

下面讨论 $t = r$ 与 $t < r$ 两种情况.

情况1: 若 $t = r$. 此时, 一个端点为点 v_1, 另一个端点在点集 $\overline{S}$ 中的所有边构成图 G 中的边

割 $[S,\overline{S}]$. 此时, 定有 $n_2 \geq r+2$. 当 $n_2 = r$ 或 $n_2 = r+1$ 时, 图 G_2 中定有度为 r 的点. 与假设 $\delta(G) > r$ 矛盾. 在图 G 的基础上构造新图 G':

$$G' = G - \bigcup_{v_i \in V(G_1)\backslash v_1} v_1 v_i + \bigcup_{v_i \in V(G_1)\backslash\{v_1\},\, v_j \in V(G_2)} v_i v_j.$$

易见图 $G' = K_r \vee (K_1 \cup K_{n-r-1})$. 令点集 $A = V(G_1)\backslash\{v_1\}$, $B = \{v_j \in V(G_2) : v_1 v_j \in E(G)\}$, 点集 $C = V(G_2)\backslash B$. 根据式 (2) 可知, 要讨论图 G 到图 G' 距离倒数无符号拉普拉斯谱半径的变化情况, 只需讨论对于所有 $v_i, v_j \in V(G)$, $\frac{1}{d_{G'}(v_i,v_j)} - \frac{1}{d_G(v_i,v_j)}$ 和 $RTr_{G'}(v_i) - RTr_G(v_i)$. 根据图的结构变化情况分析可得:

1) 对于任意 $v_i \in A$, 有 $\frac{1}{d_{G'}(v_1,v_i)} - \frac{1}{d_G(v_1,v_i)} = -\frac{1}{2}$;

2) 对于任意 $v_i \in A$, $v_j \in B$, 有 $\frac{1}{d_{G'}(v_i,v_j)} - \frac{1}{d_G(v_i,v_j)} = \frac{1}{2}$;

3) 对于任意 $v_i \in A$, $v_k \in C$, 有 $\frac{1}{d_{G'}(v_i,v_k)} - \frac{1}{d_G(v_i,v_k)} = \frac{2}{3}$;

4) $RTr_{G'}(v_1) - RTr_G(v_1) = \frac{-|A|}{2}$;

5) 对于任意 $v_i \in A$, 有 $RTr_{G'}(v_i) - RTr_G(v_i) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}|B| + \frac{2}{3}|C|$;

6) 对于任意 $v_j \in B$, 有 $RTr_{G'}(v_j) - RTr_G(v_j) = \frac{1}{2}|A|$;

7) 对于任意 $v_k \in C$, 有 $RTr_{G'}(v_k) - RTr_G(v_k) = \frac{2}{3}|A|$.

根据上述讨论结合式 (2), 有

$$\begin{aligned}
\rho(RQ(G') - \rho(RQ(G)) &\geq \mathbf{x}^T RQ(G')\mathbf{x} - \mathbf{x}^T RQ(G)\mathbf{x} \\
&= \left[-\frac{1}{2}|A|x_1^2 + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}|B| + \frac{2}{3}|C|)\sum_{v_i \in A} x_i^2 + \frac{1}{2}|A|\sum_{v_j \in B} x_j^2 + \frac{2}{3}|A|\sum_{v_k \in C} x_k^2\right] \\
&\quad + \left[-\sum_{v_i \in A} x_1 x_i + \sum_{v_i \in A, v_j \in B} x_i x_j + \sum_{v_i \in A, v_k \in C} \frac{4}{3} x_i x_k\right] \\
&> 0,
\end{aligned}$$

根据 $x_1 = \min_{1\leq i\leq n}\{x_i\}$, 故有上述最后一个不等式成立. 因此有 $\rho(RD_\alpha(G')) > \rho(RD_\alpha(G))$ 与假设矛盾.

情况2: $t < r$. 此时根据引理 3 和 $\delta(G) > r$ 可知 $n_2 > r+1$. 令点集 $W = \{v \in V(G_2) : vw \notin E(G), w \in V(G_1)\backslash\{v_1\}\}$. 由 $|[V(G_1)\backslash\{v_1\}, V(G_2)]| = r-t$, $n_2 > r+1$, 可得 $|W| > 0$. 令点集 $V_F = \{v_2, \ldots, v_{n_1-r+t}\} \subseteq V(G_1)\backslash\{v_1\}$, 易见 $\forall v_f \in V_F$ 与 $v_j \in V(G_2)$ 不相邻. 令点集 $V_{F'} = V(G_1) \setminus \{\{v_1\} \cup V_F\}$. 易见 $|[V_{F'}, V(G_2)]| = r-t$. 此时构造新图 G'':

$$G'' = G - \bigcup_{v_f \in V(F)} v_1 v_f + \bigcup_{v_i \in V(G_1)\backslash\{v_1\},\, v_j \in V(G_2),\, v_i v_j \notin E(G)} v_i v_j.$$

显然图 $G'' = K_r \vee (K_1 \cup K_{n-r-1})$. 下面讨论 $\forall v_i, v_j \in V(G)$, $\frac{1}{d_{G''}(v_i,v_j)} - \frac{1}{d_G(v_i,v_j)}$ 和 $RTr_{G''}(v_i) - RTr_G(v_i)$ 的值. 根据图的结构变化情况分析可得:

1) 对于任意 $v_f \in V_F$, 有 $\frac{1}{d_{G''}(v_1,v_f)} - \frac{1}{d_G(v_1,v_f)} = -\frac{1}{2}$;

2) 对于任意 $v_i \in V(G_1) \setminus \{v_1\}$, $v_j \in V(G_2)$, 有 $\frac{1}{d_{G''}(v_i,v_j)} - \frac{1}{d_G(v_i,v_j)} = 1 - \frac{1}{d_G(v_i,v_j)}$;

3) $RTr_{G''}(v_1) - RTr_G(v_1) = \frac{-|F|}{2}$;

4) 对于任意 $v_f \in V_F$, 有 $a_1 = RTr_{G''}(v_f) - RTr_G(v_f) = -\frac{1}{2} + \sum\limits_{v_j \in V(G_2)} (1 - \frac{1}{d_G(v_f,v_j)})$;

5) 对于任意 $v_{f'} \in V_{F'}$, 有 $a_2 = RTr_{G''}(v_{f'}) - RTr_G(v_{f'}) = \sum\limits_{v_j \in V(G_2)} (1 - \frac{1}{d_G(v_{f'},v_j)})$;

6) 对于任意 $v_j \in V(G_2)$, 有 $a_3 = RTr_{G''}(v_j) - RTr_G(v_j) = \sum\limits_{v_i \in V(G_1)\setminus\{v_1\}} (1 - \frac{1}{d_G(v_i,v_j)})$.

根据上述讨论结合式 (2), 有

$$\begin{aligned}\rho(RD_\alpha(G'') - \rho(RD_\alpha(G)) \geq & \mathbf{x}^T RD_\alpha(G'')\mathbf{x} - \mathbf{x}^T RD_\alpha(G)\mathbf{x} \\ = & \left[-\frac{|F|}{2}x_1^2 + \sum_{v_f \in V_F} a_1 x_f^2 + \sum_{v_{f'} \in V_{F'}} a_2 x_{f'}^2 + \sum_{v_j \in V(G_2)} a_3 x_j^2 \right] \\ & + \left[-\sum_{v_f \in V_F} x_1 x_f + \sum_{v_i \in G_1 \setminus \{v_1\}, v_j \in V(G_2)} 2(1 - \frac{1}{d_G(v_i,v_j)}) x_i x_j \right].\end{aligned} \tag{5}$$

已知对于任意 $v_f \in V_F$ 与点 $v_j \in G_2$ 不相邻, 故有 $d_G(v_f, v_j) \geq 2$. 这意味着 $a_1 > \frac{1}{2}(n_2 - 1)$. 对于任意 $v_f \in V_F, v_j \in V(G_2)$, 都与 $d_G(v_f, v_j) \geq 2$. 且有 $n_2 > r + 1$. 故有

$$-\frac{|F|}{2}x_1^2 + \sum_{v_f \in V_F} a_1 x_f^2 > \frac{1}{2}|F|(n_2 - 2)x_1^2 > 0,$$

和

$$\begin{aligned}& \sum_{v_i \in G_1 \setminus \{v_1\},\, v_j \in V(G_2)} 2(1 - \frac{1}{d_G(v_i,v_j)}) x_i x_j - \sum_{v_f \in V_F} x_1 x_f \\ = & \sum_{v_f \in V_F, v_j \in V(G_2)} 2(1 - \frac{1}{d_G(v_f,v_j)}) x_f x_j + \sum_{v_{f'} \in V_{F'}, v_j \in V(G_2)} 2(1 - \frac{1}{d_G(v_{f'},v_j)}) x_{f'} x_j - \sum_{v_f \in V_F} x_1 x_f \\ \geq & \sum_{v_f \in V_F, v_j \in V(G_2)} x_f x_j + \sum_{v_{f'} \in V_{F'}, v_j \in V(G_2)} 2(1 - \frac{1}{d_G(v_{f'},v_j)}) x_{f'} x_j - \sum_{v_f \in V_F} x_1 x_f \\ > & \ 0.\end{aligned}$$

由式 (5), 可得 $\rho(RQ(G'') - \rho(RQ(G)) > 0$, 即 $\rho(RD_\alpha(G'')) > \rho(RD_\alpha(G))$. 与图 G 是图集 $\overline{G}_n^r$ 中具有最大倒数距离无符号拉普拉斯谱半径的图矛盾.

综上讨论, 可知图 $G = K_r \vee (K_1 \cup K_{n-r-1})$ 是图集 $\overline{G}_n^r$ 中具有最大倒数距离无符号拉普拉斯谱半径的图. □

4. 结语

本文给出了具有固定点连通度和边连通度的两类倒数距离无符号拉普拉斯极值图. 对于其他图类的倒数距离无符号拉普拉斯极值图有待进一步探讨, 例如具有固定色数, 固定独立数, 固定匹配数

图类的倒数距离无符号拉普拉斯极值图有待进一步探讨.

参考文献

[1] Plavsić, D., Nikolić, S., Trinajstić, N. and Mihalić, Z. (1993) On the Harary Index for the Characterization of Chemical Graphs. *Journal of Mathematical Chemistry*, **12**, 235-250. https://doi.org/10.1007/BF01164638

[2] Alhevaz, A., Baghipur, M. and Ramane, H.S. (2019) Computing the Reciprocal Distance Signless Laplacian Eigenvalues and Energy of Graphs. *Matematiche LXXIV*, **I**, 49-73. https://doi.org/10.2478/ausi-2018-0011

[3] Medina, L. and Trigo, M. (2021) Upper Bounds and Lower Bounds for the Spectral Radius of Reciprocal Distance, Reciprocal Distance Laplacian and Reciprocal Distance Signless Laplacian Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **609**, 386-412. https://doi.org/10.1016/j.laa.2020.09.024

[4] Su, L., Li, H., Shi, M. and Zhang, J. (2014) On the Spectral Radius of the Reciprocal Distance Matrix. *Advances in Mathematics (China)*, **43**, 551-558.

[5] Huang, F., Li, X. and Wang, S. (2015) On Graphs with Maximum Harary Spectral Radius. *Applied Mathematics and Computation*, **266**, 937-945. https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.05.146

[6] So, W. (1994) Commutativity and Spectra of Hermitian Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **212/213**, 121-129. https://doi.org/10.1016/0024-3795(94)90399-9

[7] West, D.B. (2001) Introduction to Graph Theory. Second Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River.