

一类传染病模型的稳定性分析

亓若琳, 李 静*

临沂大学数学与统计学院, 山东 临沂

收稿日期: 2022年3月14日; 录用日期: 2022年4月8日; 发布日期: 2022年4月19日

摘 要

本文主要研究一类离散随机动力系统的稳定性, 利用定性分析的方法对随机模型进行研究, 获得传染病模型中平衡点渐近稳定的条件及其相应结论并对其进行模拟验证。

关键词

传染病模型, 离散随机, 渐近稳定性

Analysis on Stability for a Class of Epidemiological Model

Ruolin Qi, Jing Li*

College of Mathematics and Statistics, Linyi University, Linyi Shandong

Received: Mar. 14th, 2022; accepted: Apr. 8th, 2022; published: Apr. 19th, 2022

Abstract

The stability of an epidemic model with discrete and stochastic version will be studied. We observe the analytical study for the stochastic model in detail and find out the conditions for asymptotic stability of the endemic equilibrium in the mean sense, and then give the simulation of the system.

Keywords

Epidemiological Model, Discrete and Stochastic, Asymptotic Stability

*通讯作者。



1. 离散模型的分析

众所周知, 流行病学是研究疾病传播的学科, 目的是寻找促使疾病发生的因素等, 在人口不重叠的情况下, 离散时间模型比连续时间模型更合理[1] [2]。

本节主要研究具有非线性发生率的 SI 系统, 并希望研究以下连续模型的离散版本的动力学性态:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = b - dS - \frac{\beta SI}{1 + aI^3}, \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{1 + aI^3} - \mu I, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 S, I 表示 t 时刻的易感密度和感染密度。参数 b, d 和 β 分别表示该疾病的增长率、死亡率和有效传播率[3]。此外, μ 是代表感染者死亡率的参数, 参数 a 衡量抑制作用, 假设所有的参数都为正的。我们研究以下具有饱和发生率的离散模型的动力学,

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n + b - dS_n - \frac{\beta S_n I_n}{1 + aI_n^3}, \\ I_{n+1} = I_n + \frac{\beta S_n I_n}{1 + aI_n^3} - \mu I_n, \end{cases} \quad (1.2)$$

系统(1.2)中的所有参数均与系统(1.1)中的相同。

通过对系统(1.2)的简单计算, 可以得到两个非负平衡点 $E_1\left(\frac{b}{d}, 0\right), E_2(S^*, I^*)$, 其中 $S^* = \frac{\mu(1 + aI^{*3})}{\mu}$

和 I^* 是方程的正根 $a\mu dI^{*3} + \beta\mu I^* + \mu d - b\beta = 0$, 系统(1.2)的雅可比矩阵如下[4]

$$J(S, I) = \begin{pmatrix} 1 - d - \frac{\beta I}{1 + aI^3} & -\beta S \frac{1 - 2aI^3}{(1 + aI^3)^2} \\ \frac{\beta I}{1 + aI^3} & 1 - \mu + \beta S \frac{1 - 2aI^3}{(1 + aI^3)^2} \end{pmatrix}$$

雅可比矩阵的特征方程可以写成

$$\lambda^2 - Tr\lambda + Det = 0$$

其中

$$Tr = 2 - \left(d + \frac{\beta I}{1 + aI^3} + \mu \right) + \frac{\beta S 1 - 2aI^3}{(1 + aI^3)^2}$$

以及

$$Det = \left(1 - d - \frac{\beta I}{1 + aI^3} \right) (1 - \mu) + \frac{\beta S 1 - 2aI^3}{(1 + aI^3)^2} (1 - d)$$

为了研究平衡点的稳定性, 我们首先给出了以下引理

引理 1 让 $F(\lambda) = \lambda^2 - B\lambda + C$, 假设 $F(1) > 0$, λ_1 和 λ_2 是 $F(\lambda) = 0$ 的根

- 1) $|\lambda_1| < 1$ 且 $|\lambda_2| < 1$ 当且仅当 $F(-1) > 0$ 且 $C < 1$;
- 2) $|\lambda_1| < 1$ 且 $|\lambda_2| > 1$ (或 $|\lambda_1| > 1$ 且 $|\lambda_2| < 1$) 当且仅当 $F(-1) < 0$;
- 3) $|\lambda_1| > 1$ 且 $|\lambda_2| > 1$ 当且仅当 $F(-1) > 0$ 且 $C > 1$;
- 4) $|\lambda_1| = -1$ 且 $|\lambda_2| \neq 1$ 当且仅当 $F(-1) = 0$ 且 $B \neq 0, 2$ 。

那么可以得到

定理 1 假设 $\mu d > bk$, 那么平衡点 E_1

- 1) 当参数满足 $\frac{\beta b}{d} + (\mu d - \beta b) < \mu + d < 2 + \frac{\beta b}{d} + \frac{\mu d - \beta b}{2}$ 时, E_1 是一个汇点;
- 2) 当参数满足 $\mu + d < \min \frac{\beta b}{d} + (\mu d - \beta b), 2 + \frac{\beta b}{d} + \frac{\mu d - \beta b}{2}$ 时, E_1 是一个源点。

现在我们将讨论平衡点 E_2 的稳定性及其分支。平衡点 E_2 是稳定的如果它满足下列式子:

$$\begin{aligned} |Tr(J(E_2))| &< Det(J(E_2)) + 1 \\ Det(J(E_2)) &< 1 \end{aligned}$$

当 $J(E_2)$ 满足

$$J(E_2) = \begin{pmatrix} 1-d - \frac{\beta I^*}{1+a(I^*)^3} & -\beta S^* \frac{1-2a(I^*)^3}{(1+a(I^*)^3)^2} \\ \frac{\beta I^*}{1+a(I^*)^3} & 1-\mu + \beta S^* \frac{1-2a(I^*)^3}{(1+a(I^*)^3)^2} \end{pmatrix}$$

其中 $Tr = 2 - (d + m + \mu)$ 并且 $Det = (1 - d - m)(1 - \mu) + n(1 - d)$,

$$m = \frac{\beta I^*}{1+a(I^*)^3} \text{ 且 } n = \beta S^* \frac{1-2a(I^*)^3}{(1+a(I^*)^3)^2}$$

这样保证了特征根 $\lambda_{1,2}$ 位于复平面的单位圆内, 从而可以判断平衡点的局部稳定性。

我们可以得到

定理 2 如果满足以下条件, 平衡点 E_2 是渐近稳定的:

- 1) $4 + \mu(d + m) + 2q > 2(d + \mu + m) + nd$;
- 2) $\mu(d + m) > nd$;
- 3) $\mu + d + m + nd > \mu(d + m) + n$ 。

随机模型分析

在这一部分中, 我们研究连续模型(1.1)的随机版本的动力学[5] [6]。在一些主要参数中引入了随机扰动, 我们允许变量 S, I 在正平衡点 E_2 处围绕其值的随机扰动。假设在模型(1.1)中变量在 E_2 处的值周围的随机扰动属于白噪声类型, 其与 S, I 与值 S^*, I^* 的距离成正比, 所以系统(1.1)会导致

$$\begin{cases} dS = b - dS - \frac{\beta SI}{1+aI^3} dt + \sigma_1(S - S^*) d\xi_1(t), \\ dI = \frac{\beta SI}{1+aI^3} - \mu I dt + \sigma_2(I - I^*) d\xi_2(t), \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 $\sigma_j, j=1,2$ 是实常数, $\xi_j(t), j=1,2$ 是相互独立的标准维纳过程。通过研究(2.1)的平衡点 E_2 的渐近随机行为来得出系统(2.1)的动力学行为对于这种随机性是否具有稳定性。我们将(2.1)视为 ITO 随机微分系统。系统(2.1)正平衡 E_2 处可以变量替换使其中心化[7]:

$$v_1 = S - S^*, v_2 = I - I^*$$

随机微分系统在 E_2 处线性化

$$dv(t) = f(v(t))dt + g(v(t))d\xi(t)$$

其中 $v(t) = col(v_1(t), v_2(t))$ 。

定理 3 假设 $\sigma_1 < \left(2 \left[d + \frac{\beta I^*}{1+a(I^*)^3} \right] \right)^{\frac{1}{2}}$ 和 $\sigma_2 < \left(\frac{6\beta S^* a(I^*)^3}{(1+a(I^*)^3)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$, 那么(2.1)的零解是渐近均方稳定的。

证明. 让我们考虑 Lyapunov 函数 $W(v) = \frac{1}{2}(w_1 v_1^2 + w_2 v_2^2)$, 其中 W_i 为选定的实正常数。进一步有

$$\begin{aligned} LW(v) = & - \left[d + \frac{\beta I^*}{1+a(I^*)^3} \right] w_1 v_1^2 - \beta S^* \frac{1-2a(I^*)^3}{[1+a(I^*)^3]^2} w_1 v_1 v_2 + \frac{\beta I^*}{1-2a(I^*)^3} w_2 v_1 v_2 \\ & + \left(\beta S^* \frac{1-2a(I^*)^3}{[1+a(I^*)^3]^2} - \mu \right) w_2 v_2^2 + \frac{1}{2} Tr \left[g^T(v) \frac{\partial^2 W}{\partial u^2} g(v) \right] \end{aligned} \tag{3.1}$$

因此

$$g^T(v) \frac{\partial^2 W}{\partial u^2} g(v) = \begin{pmatrix} w_1 \sigma_1^2 v_1^2 & 0 \\ 0 & w_2 \sigma_2^2 v_2^2 \end{pmatrix}$$

和

$$\frac{1}{2} Tr \left[g^T(v) \frac{\partial^2 W}{\partial u^2} g(v) \right] = \frac{1}{2} (w_1 \sigma_1^2 v_1^2 + w_2 \sigma_2^2 v_2^2) \tag{3.2}$$

易得

$$LW(v) = -b_{11} v_1^2 - b_{22} v_2^2$$

$$\text{其中 } b_{11} = d + \frac{\beta I^*}{1+a(I^*)^3} - \frac{1}{2} \sigma_1^2 w_1, \quad b_{22} = \left(\mu - \beta S^* \frac{1-2a(I^*)^3}{[1+a(I^*)^3]^2} - \frac{1}{2} \sigma_2^2 \right) w_2, \quad b_{12} = b_{21} = 0.$$

即

$$LW(v) = -Y^T Z Y$$

其中 $Y = (u_1, u_2)^T$ and $Z = [b_{ij}]_{2 \times 2}$ 。Z 是正定的, 如果 i) $b_{ii} > 0, i=1,2$ 和 ii) $|Z| > 0$ 。证毕。

2. 离散模型的模拟

从模拟图形(图 1)可以看出系统(2.1)的平衡点渐近稳定, 轨道收敛到正平衡点, 也揭示了该系统的稳定特性。

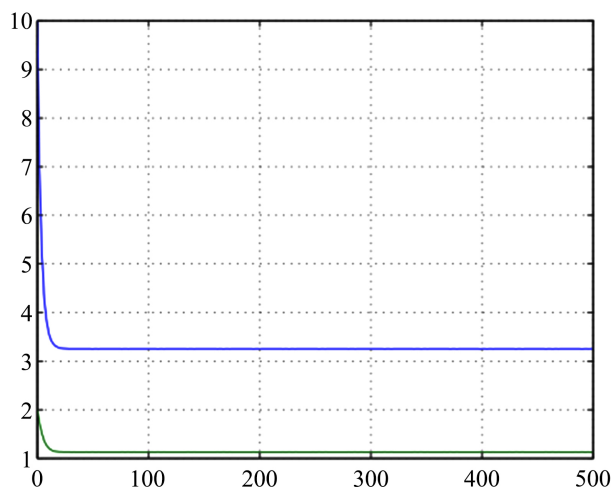


Figure 1. Simulation

图 1. 仿真图

3. 结论

具有非线性传染率的离散随机 SI 系统展示了两种不同的动力性态。其中 βI 代表感染力, 疾病的有效传播率对控制疫情起着至关重要的作用。当感染个体的数量非常巨大时。从生物学角度来看, 我们可以解释, 对于大量的感染性疾病, 人群可能倾向于减少单位时间内的接触次数, 促使易感者采取保护措施。然而, 对一种特定的疾病进行类似的分析将是有趣的, 借助数据来解释这两类模型作为政策指导工具的预测性质以及实施。

致 谢

作者对同行评阅人的意见和建议表示深深的感谢。本文由 2021 大学生创新创业训练项目 (X202110452284) 支持。

参考文献

- [1] Anderson, R. and May, R. (1979) Population Biology of Infectious Diseases: Part 1. *Nature*, **280**, 361-367. <https://doi.org/10.1038/280361a0>
- [2] Ma, J. and Ma, Z. (2006) Epidemic Threshold Conditions for Seasonally Forced SEIR Models. *Mathematical Biosciences and Engineering*, **3**, 161-172. <https://doi.org/10.3934/mbe.2006.3.161>
- [3] Liu, W.M., Hethcote, H.W. and Levin, S.A. (1987) Dynamical Behavior of Epidemiological Models with Nonlinear Incidence Rates. *Journal of Mathematical Biology*, **25**, 359-380. <https://doi.org/10.1007/BF00277162>
- [4] Hethcote, H.W., Lewis, M.A. and Van den Driessche, P. (1989) An Epidemiological Models with Delay and a Nonlinear Incidence Rate. *Journal of Mathematical Biology*, **27**, 49-64. <https://doi.org/10.1007/BF00276080>
- [5] Liu, W.M., Levin, S.A. and Iwasa, Y. (1986) Influence of Nonlinear Incidence Rates upon the Behavior of SIRS Epidemiological Models. *Journal of Mathematical Biology*, **23**, 187-204. <https://doi.org/10.1007/BF00276956>
- [6] Mao, X., Marion, G. and Renshow, E. (2002) Environmental Brownian Noise Suppresses Explosions in Population Dynamics. *Stochastic Processes and Their Applications*, **97**, 95-110. [https://doi.org/10.1016/S0304-4149\(01\)00126-0](https://doi.org/10.1016/S0304-4149(01)00126-0)
- [7] Beretta, E., Kolmanovskii, V. and Shaikhet, L. (1998) Stability of Epidemic Model with Time Delays Influenced by the Stochastic Perturbations. *Mathematics and Computers in Simulation*, **45**, 269-267. [https://doi.org/10.1016/S0378-4754\(97\)00106-7](https://doi.org/10.1016/S0378-4754(97)00106-7)