Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2022, 11(6), 3780-3787**
Published Online June 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.116405

相容BiHom-李代数的表示及BiHom-李代数的形变

孙　尧

辽宁师范大学数学学院，辽宁　大连

收稿日期：2022年5月23日；录用日期：2022年6月15日；发布日期：2022年6月24日

摘　要

本文主要研究相容BiHom-李代数的表示与BiHom-李代数的形变。首先给出了相容BiHom-李代数的定义，找到判断两个BiHom-李代数是相容的方法。其次定义了相容BiHom-李代数的表示，得到了相容BiHom-李代数与其表示空间的直和上存在相容BiHom-李代数结构的条件，并给出了相容BiHom-李代数表示的例子。然后讨论了相容BiHom-李代数表示的对偶映射同样是该相容BiHom-李代数表示所满足的条件，并构造出了对偶表示。最后构造了BiHom-李代数的形变。

关键词

BiHom-李代数，相容BiHom-李代数，表示，形变

Representation of Compatible BiHom-Lie Algebra and Deformation of BiHom-Lie Algebra

Yao Sun

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: May 23rd, 2022; accepted: Jun. 15th, 2022; published: Jun. 24th, 2022

Abstract

In this paper, we mainly discuss the representation of BiHom-Lie algebra and the deformation of BiHom-Lie algebra. Firstly, we give the definition of compatible BiHom-Lie algebra and the method

文章引用: 孙尧. 相容 BiHom-李代数的表示及 BiHom-李代数的形变[J]. 应用数学进展, 2022, 11(6): 3780-3787.
DOI: 10.12677/aam.2022.116405

of judging the compatibility of two BiHom-Lie algebras. Secondly, we define the representation of compatible BiHom-Lie algebra, and get the conditions for the existence of compatible BiHom-Lie algebra structure on the direct sum of the compatible BiHom-Lie algebra and its representation space. We also give an example of the representation of compatible BiHom-Lie algebra. Then we give the conditions when the dual mapping of the representation of compatible BiHom-Lie algebra is also the representation of compatible BiHom-Lie algebra and constructs the dual representation of the representation of compatible BiHom-Lie algebra. Finally, we introduce the deformation of BiHom-Lie algebra.

Keywords

BiHom-Lie Algebra, Compatible BiHom-Lie Algebra, Representation, Deformation

1. 引言

BiHom-李代数是一类非常重要的代数，与李代数、Hom-李代数有非常密切的联系。当 BiHom-李代数的两个扭曲映射为恒等映射时，BiHom-李代数即为李代数；当 BiHom-李代数的两个扭曲映射相等时即为 Hom-李代数。BiHom-李代数是 2015 年 Graziani G，Makhlouf A，Menini C 在文献[1]中提出的，之后一些学者对 BiHom-李代数作了进一步研究。例如，文献[2]中作者研究了 BiHom-李代数的分裂扩张和相应的上同调，并且建立了一个由交换 BiHom-李代数 V 扩张的 BiHom-李代数 L 的等价类与它的第二上同调群之间的对应关系。文献[3]中作者研究了 BiHom-李代数关于表示、平凡表示、伴随表示的上同调。对于李代数和 Hom-李代数，文献[4] [5]研究了相容李代数和相容 Hom-李代数的上同调。本文主要研究相容 BiHom-李代数的表示和 BiHom-李代数的形变。

2. 预备知识

定义 2.1 ([1])若 g 是域 K 上的线性空间，$\alpha,\beta\in End(g)$，$[-,-]:g\otimes g\to g$ 是双线性映射，$\alpha,\beta:g\to g$ 是线性映射，如果 $\forall a,b,c\in g$，恒有

$$\alpha\beta=\beta\alpha\,, \tag{2.1}$$

$$[\beta(a),\alpha(b)]=-[\beta(b),\alpha(a)]\,, \tag{2.2}$$

$$[\beta^2(a),[\beta(b),\alpha(c)]]+[\beta^2(b),[\beta(c),\alpha(a)]]+[\beta^2(c),[\beta(a),\alpha(b)]]=0\,, \tag{2.3}$$

$$\alpha[a,b]=[\alpha(a),\alpha(b)],\quad \beta[a,b]=[\beta(a),\beta(b)]\,, \tag{2.4}$$

则称 $(g,[-,-],\alpha,\beta)$ 是 BiHom-李代数。

注记 2.1 ([3]) 设 $(g,[-,-],\alpha,\beta)$ 是 BiHom-李代数，若 α,β 是双射，则称 $(g,[-,-],\alpha,\beta)$ 为正则 BiHom-李代数。

定义 2.2 ([1])设 $(g,[-,-],\alpha,\beta)$ 是 BiHom-李代数，V 是线性空间，$\alpha_V,\beta_V\in End(V)$ 且 $\alpha_V\beta_V=\beta_V\alpha_V$，$\rho:g\to End(V)$ 是线性映射，如果对于 $\forall x,y\in g$ 恒有

$$\rho(\alpha(x))\circ\alpha_V=\alpha_V\circ\rho(x),\quad \rho(\beta(x))\circ\beta_V=\beta_V\circ\rho(x),\tag{2.5}$$

$$\rho([\beta(x),y])\circ\beta_V=\rho(\alpha\beta(x))\circ\rho(y)-\rho(\beta(y))\circ\rho(\alpha(x)),\tag{2.6}$$

则称 $(V,\rho,\alpha_V,\beta_V)$ 是 BiHom-李代数 $(g,[-,-],\alpha,\beta)$ 的表示。

命题 2.1 ([1])设 $(g,[-,-],\alpha,\beta)$ 是 BiHom-李代数，$(V,\rho,\alpha_V,\beta_V)$ 是 $(g,[-,-],\alpha,\beta)$ 的表示，α,β_V 可逆，在 $g\oplus V$ 上定义

$$(\alpha+\alpha_V)(x+u)=\alpha(x)+\alpha_V(u),\quad (\beta+\beta_V)(x+u)=\beta(x)+\beta_V(u),$$

$$\{x+u,y+v\}=[x,y]+\rho(x)v-\rho(\alpha^{-1}\beta(y))(\alpha_V\beta_V^{-1}(u)),$$

其中 $x,y\in g,u,v\in V$，则 $(g\oplus V,\{-,-\},\alpha+\alpha_V,\beta+\beta_V)$ 是 BiHom-李代数。

注记 2.2 通过直接计算可知，当 $(g\oplus V,\{-,-\},\alpha+\alpha_V,\beta+\beta_V)$ 是 BiHom-李代数时，$(V,\rho,\alpha_V,\beta_V)$ 是 $(g,[-,-],\alpha,\beta)$ 的表示。

命题 2.2 ([1])设 $(g,[-,-],\alpha,\beta)$ 是正则 BiHom-李代数，定义 $ad:g\to End(g)$，其中 $ad(x)y=[x,y](\forall x,y\in g)$，则 (g,ad,α,β) 是 $(g,[-,-],\alpha,\beta)$ 的表示，称为伴随表示。

命题 2.3 ([6])设 $(g,[-,-],\alpha,\beta)$ 是 BiHom-李代数，$(V,\rho,\alpha_V,\beta_V)$ 是它的表示，定义 $\rho^*:g\to End(V^*)$，其中 $\rho^*(x)(f)=-f\circ\rho(x)\ (\forall f\in V^*,x\in g)$，则 $(V^*,\rho^*,\alpha_V^*,\beta_V^*)$ 是 $(g,[-,-],\alpha,\beta)$ 的表示当且仅当对于 $\forall x,y\in g$ 满足

$$\rho(x)\circ\alpha_V=\alpha_V\circ\rho(\alpha(x)),\quad \rho(x)\circ\beta_V=\beta_V\circ\rho(\beta(x)),\tag{2.7}$$

$$\beta_V\circ\rho([\beta(x),y])=\rho(\alpha(x))\circ\rho(\beta(y))-\rho(y)\circ\rho(\alpha\beta(x))。\tag{2.8}$$

命题 2.4 ([6])设 $(g,[-,-],\alpha,\beta)$ 是 BiHom-李代数，$(V,\rho,\alpha_V,\beta_V)$ 是 $(g,[-,-],\alpha,\beta)$ 的表示，α_V,β_V 可逆，定义 $\rho^\circ:g\to End(V^*)$，其中

$$\rho^\circ(x)=\rho^*(\alpha\beta(x))(\beta_V^{-2})^*\ (\forall x\in g),\tag{2.9}$$

则 $\left(V^*,\rho^\circ,(\alpha_V^{-1})^*,(\beta_V^{-1})^*\right)$ 是 $(g,[-,-],\alpha,\beta)$ 的表示，称为 $(V,\rho,\alpha_V,\beta_V)$ 的对偶表示。

3. 相容 BiHom-李代数的表示

定义 3.1 设 $(g,[-,-]_1,\alpha,\beta)$，$(g,[-,-]_2,\alpha,\beta)$ 是 BiHom-李代数，如果对于 $\forall k_1,k_2\in K$，$(g,k_1[-,-]_1+k_2[-,-]_2,\alpha,\beta)$ 恒为 BiHom-李代数，则称 $(g,[-,-]_1,\alpha,\beta)$ 与 $(g,[-,-]_2,\alpha,\beta)$ 是相容的，用 $(g,[-,-]_1,[-,-]_2,\alpha,\beta)$ 表示。

定理 3.1 两个 BiHom-李代数 $(g,[-,-]_1,\alpha,\beta)$ 和 $(g,[-,-]_2,\alpha,\beta)$ 是相容的当且仅当

$$\begin{aligned}&[\beta^2(x),[\beta(y),\alpha(z)]_1]_2+[\beta^2(x),[\beta(y),\alpha(z)]_2]_1+[\beta^2(y),[\beta(z),\alpha(x)]_1]_2\\&+[\beta^2(y),[\beta(z),\alpha(x)]_2]_1+[\beta^2(z),[\beta(x),\alpha(y)]_1]_2+[\beta^2(z),[\beta(x),\alpha(y)]_2]_1=0\end{aligned},\tag{3.1}$$

其中 $\forall x,y,z\in g$。

证明由定义 2.1，$(g,[-,-]_1,\alpha,\beta)$ 和 $(g,[-,-]_2,\alpha,\beta)$ 是相容的当且仅当 $[-,-]=k_1[-,-]_1+k_2[-,-]_2$ 满足等式(2.1)~(2.4)。由已知 α,β 是可交换的。由于 α,β 关于 $[-,-]_1,[-,-]_2$ 满足等式(2.2)，因此有 $[\beta(x),\alpha(y)]=k_1[\beta(x),\alpha(y)]_1+k_2[\beta(x),\alpha(y)]_2=-k_1[\beta(y),\alpha(x)]_1-k_2[\beta(y),\alpha(x)]_2=-[\beta(y),\alpha(x)]$，所以 $(g,[-,-],\alpha,\beta)$ 满足等式(2.2)。由于 $[-,-]_1,[-,-]_2$ 满足等式(2.3)，所以

$$\begin{aligned}&\left[\beta^2(x),\left[\beta(y),\alpha(z)\right]\right]+\left[\beta^2(y),\left[\beta(z),\alpha(x)\right]\right]+\left[\beta^2(z),\left[\beta(x),\alpha(y)\right]\right]\\&=k_1k_2\left(\left[\beta^2(x),\left[\beta(y),\alpha(z)\right]_1\right]_2+\left[\beta^2(x),\left[\beta(y),\alpha(z)\right]_2\right]_1+\left[\beta^2(y),\left[\beta(z),\alpha(x)\right]_1\right]_2\right.,\\&\left.\quad+\left[\beta^2(y),\left[\beta(z),\alpha(x)\right]_2\right]_1+\left[\beta^2(z),\left[\beta(x),\alpha(y)\right]_1\right]_2+\left[\beta^2(z),\left[\beta(x),\alpha(y)\right]_2\right]_1\right)\end{aligned}$$

因此 $[-,-]$ 满足等式(2.3)当且仅当 $[-,-]_1,[-,-]_2$ 满足等式(3.1)。由于 α,β 关于 $[-,-]_1,[-,-]_2$ 满足等式(2.4)，所以显然有 α,β 关于 $[-,-]$ 满足等式(2.4)。证毕。

定义 3.2 设 $\left(g,[-,-]_1,[-,-]_2,\alpha,\beta\right)$ 是相容的 BiHom-李代数，如果 $(V,\rho_1,\alpha_V,\beta_V)$ 是 $\left(g,[-,-]_1,\alpha,\beta\right)$ 的表示，$(V,\rho_2,\alpha_V,\beta_V)$ 是 $\left(g,[-,-]_2,\alpha,\beta\right)$ 的表示，并且对于 $\forall x,y\in g$ 恒有

$$\begin{aligned}&\rho_1\left(\left[\beta(x),y\right]_2\right)\beta_V+\rho_2\left(\left[\beta(x),y\right]_1\right)\beta_V+\rho_1\left(\beta(y)\right)\rho_2\left(\alpha(x)\right)\\&+\rho_2\left(\beta(y)\right)\rho_1\left(\alpha(x)\right)-\rho_1\left(\alpha\beta(x)\right)\rho_2(y)-\rho_2\left(\alpha\beta(x)\right)\rho_1(y)=0\end{aligned},\tag{3.2}$$

则称 $(V,\rho_1,\rho_2,\alpha_V,\beta_V)$ 是相容 BiHom-李代数 $\left(g,[-,-]_1,[-,-]_2,\alpha,\beta\right)$ 的表示。

定理 3.2 设 $\left(g,[-,-]_1,[-,-]_2,\alpha,\beta\right)$ 是相容的 BiHom-李代数，V 是线性空间，$\rho_1,\rho_2:g\to End(V)$ 为线性映射，$\alpha_V,\beta_V\in End(V)$，$\alpha,\beta_V$ 是双射，在 $g\oplus V$ 上定义

$$(\alpha+\alpha_V)(x+u)=\alpha(x)+\alpha_V(u),\quad(\beta+\beta_V)(x+u)=\beta(x)+\beta_V(u),$$

$$\{x+u,y+v\}_i=[x,y]_i+\rho_i(x)v-\rho_i\left(\alpha^{-1}\beta(y)\right)\left(\alpha_V\beta_V^{-1}(u)\right),$$

其中 $i=1,2$，$x,y\in g$，$u,v\in V$，则 $(V,\rho_1,\rho_2,\alpha_V,\beta_V)$ 是 $\left(g,[-,-]_1,[-,-]_2,\alpha,\beta\right)$ 的表示当且仅当 $\left(g\oplus V,\{-,-\}_1,\{-,-\}_2,\alpha+\alpha_V,\beta+\beta_V\right)$ 是相容的 BiHom-李代数。

证明 由命题 2.1 可知，$(V,\rho_i,\alpha_V,\beta_V)$ 是 $\left(g,[-,-]_i,\alpha,\beta\right)(i=1,2)$ 的表示当且仅当 $\left(g\oplus V,\{-,-\}_i,\alpha+\alpha_V,\beta+\beta_V\right)(i=1,2)$ 是 BiHom-李代数，因此只需证明 $(V,\rho_1,\rho_2,\alpha_V,\beta_V)$ 满足等式(3.2)当且仅当 $\left(g\oplus V,\{-,-\}_1,\{-,-\}_2,\alpha+\alpha_V,\beta+\beta_V\right)$ 满足等式(3.1)。由于

$$\begin{aligned}&\left\{(\beta+\beta_V)^2(x+u),\left\{(\beta+\beta_V)(y+v),(\alpha+\alpha_V)(z+w)\right\}_1\right\}_2+\left\{(\beta+\beta_V)^2(x+u),\left\{(\beta+\beta_V)(y+v),\right.\right.\\&\left.\left.(\alpha+\alpha_V)(z+w)\right\}_2\right\}_1+\left\{(\beta+\beta_V)^2(y+v),\left\{(\beta+\beta_V)(z+w),(\alpha+\alpha_V)(x+u)\right\}_1\right\}_2\\&+\left\{(\beta+\beta_V)^2(y+v),\left\{(\beta+\beta_V)(z+w),(\alpha+\alpha_V)(x+u)\right\}_2\right\}_1+\left\{(\beta+\beta_V)^2(z+w),\right.\\&\left.\left\{(\beta+\beta_V)(x+u),(\alpha+\alpha_V)(y+z)\right\}_1\right\}_2+\left\{(\beta+\beta_V)^2(z+w),\left\{(\beta+\beta_V)(x+u),(\alpha+\alpha_V)(y+v)\right\}_2\right\}_1\\&=\left(-\rho_2\left(\left[\alpha^{-1}\beta^2(y),\beta(z)\right]_1\right)(\alpha_V\beta_V)-\rho_1\left(\left[\alpha^{-1}\beta^2(y),\beta(z)\right]_2\right)(\alpha_V\beta_V)+\rho_2\left(\beta^2(y)\right)\left(\rho_1\left(\beta(z)\right)(\alpha_V)\right)\right.\\&\quad\left.+\rho_1\left(\beta^2(y)\right)\left(\rho_2\left(\beta(z)\right)(\alpha_V)\right)-\rho_2\left(\beta^2(z)\right)\left(\rho_1\left(\beta(y)\right)(\alpha_V)\right)-\rho_1\left(\beta^2(z)\right)\left(\rho_2\left(\beta(y)\right)(\alpha_V)\right)\right)(u)\\&+\left(-\rho_2\left(\left[\alpha^{-1}\beta^2(z),\beta(x)\right]_1\right)(\alpha_V\beta_V)-\rho_1\left(\left[\alpha^{-1}\beta^2(z),\beta(x)\right]_2\right)(\alpha_V\beta_V)+\rho_2\left(\beta^2(z)\right)\left(\rho_1\left(\beta(x)\right)(\alpha_V)\right)\right.\\&\left.+\rho_1\left(\beta^2(z)\right)\left(\rho_2\left(\beta(x)\right)(\alpha_V)\right)-\rho_2\left(\beta^2(x)\right)\left(\rho_1\left(\beta(z)\right)(\alpha_V)\right)-\rho_1\left(\beta^2(x)\right)\left(\rho_2\left(\beta(z)\right)(\alpha_V)\right)\right)(v)\\&+\left(-\rho_2\left(\left[\alpha^{-1}\beta^2(x),\beta(y)\right]_1\right)(\alpha_V\beta_V)-\rho_1\left(\left[\alpha^{-1}\beta^2(x),\beta(y)\right]_2\right)(\alpha_V\beta_V)+\rho_2\left(\beta^2(x)\right)\left(\rho_1\left(\beta(y)\right)(\alpha_V)\right)\right.\\&\left.+\rho_1\left(\beta^2(x)\right)\left(\rho_2\left(\beta(y)\right)(\alpha_V)\right)-\rho_2\left(\beta^2(y)\right)\left(\rho_1\left(\beta(x)\right)(\alpha_V)\right)-\rho_1\left(\beta^2(y)\right)\left(\rho_2\left(\beta(x)\right)(\alpha_V)\right)\right)(w)\end{aligned}$$

令 $a=\alpha^{-1}\beta(x),b=\beta(y),c=\alpha^{-1}\beta(y),d=\beta(z),r=\alpha^{-1}\beta(z),s=\beta(x)$，因为 $\alpha_V\beta_V=\beta_V\alpha_V$，所以上式等于

$$\begin{aligned}&\left(-\rho_2\left(\left[\beta(c),d\right]_1\right)\beta_V-\rho_1\left(\left[\beta(c),d\right]_2\right)\beta_V+\rho_2\left(\alpha\beta(c)\right)\rho_1(d)\right.\\&\left.+\rho_1\left(\alpha\beta(c)\right)\rho_2(d)-\rho_2\left(\beta(d)\right)\rho_1\left(\alpha(c)\right)-\rho_1\left(\beta(d)\right)\rho_2\left(\alpha(c)\right)\right)(u)\\&+\left(-\rho_2\left(\left[\beta(r),s\right]_1\right)\beta_V-\rho_1\left(\left[\beta(r),s\right]_2\right)\beta_V+\rho_2\left(\alpha\beta(r)\right)\rho_1(s)\right.\\&\left.+\rho_1\left(\alpha\beta(r)\right)\rho_2(s)-\rho_2\left(\beta(s)\right)\rho_1\left(\alpha(r)\right)-\rho_1\left(\beta(s)\right)\rho_2\left(\alpha(r)\right)\right)(v)\\&+\left(-\rho_2\left(\left[\beta(a),b\right]_1\right)\beta_V-\rho_1\left(\left[\beta(a),b\right]_2\right)\beta_V+\rho_2\left(\alpha\beta(a)\right)\rho_1(b)\right.\\&\left.+\rho_1\left(\alpha\beta(a)\right)\rho_2(b)-\rho_2\left(\beta(b)\right)\rho_1\left(\alpha(a)\right)-\rho_1\left(\beta(b)\right)\rho_2\left(\alpha(a)\right)\right)(w)=0\end{aligned}$$

由 u,v,w 的任意性，$\left(g\oplus V,\{-,-\}_1,\{-.-\}_2,\alpha+\alpha_V,\beta+\beta_V\right)$ 满足等式(3.1)当且仅当 $\left(V,\rho_1,\rho_2,\alpha_V,\beta_V\right)$ 满足等式(3.2)。证毕。

例 3.1 设 $\left(g,[-,-]_1,[-,-]_2,\alpha,\beta\right)$ 是相容正则 BiHom-李代数，则 $\left(g,ad_1,ad_2,\alpha,\beta\right)$ 是 $\left(g,[-,-]_1,[-,-]_2\,\alpha,\beta\right)$ 的表示。

证明 由命题 2.2 知 $\left(g,ad_i,\alpha,\beta\right)$ 是正则 BiHom-李代数 $\left(g,[-,-]_i,\alpha,\beta\right)(i=1,2)$ 的表示。$\forall x,y,z\in g$，

$$\begin{aligned}&\left(ad_1\left(\left[\beta(x),y\right]_2\right)\beta+ad_2\left(\left[\beta(x),y\right]_1\right)\beta+ad_1\left(\beta(y)\right)\left(ad_2\left(\alpha(x)\right)\right)\right.\\&\left.+ad_2\left(\beta(y)\right)ad_1\left(\alpha(x)\right)-ad_1\left(\alpha\beta(x)\right)ad_2(y)-ad_2\left(\alpha\beta(x)\right)ad_1(y)\right)(z)\\&=-\left[\beta^2\left(\alpha^{-1}(z)\right),\left[\beta\left(\beta^{-1}\alpha(x)\right),\alpha\left(\beta^{-1}(y)\right)\right]_2\right]_1-\left[\beta^2\left(\alpha^{-1}(z)\right),\left[\beta\left(\beta^{-1}\alpha(x)\right),\alpha\left(\beta^{-1}(y)\right)\right]_1\right]_2,\\&-\left[\beta^2\left(\beta^{-1}(y)\right),\left[\beta\left(\alpha^{-1}(z)\right),\alpha\left(\beta^{-1}\alpha(x)\right)\right]_2\right]_1-\left[\beta^2\left(\beta^{-1}(y)\right),\left[\beta\left(\alpha^{-1}(z)\right),\alpha\left(\beta^{-1}\alpha(x)\right)\right]_1\right]_2\\&-\left[\beta^2\left(\beta^{-1}\alpha(x)\right),\left[\beta\left(\beta^{-1}(y)\right),\alpha\left(\alpha^{-1}(z)\right)\right]_2\right]_1-\left[\beta^2\left(\beta^{-1}\alpha(x)\right),\left[\beta\left(\beta^{-1}(y)\right),\alpha\left(\alpha^{-1}(z)\right)\right]_1\right]_2\end{aligned}$$

令 $a=\alpha^{-1}(z),b=\beta^{-1}\alpha(x),b=\beta^{-1}(y)$，由于 $\left(g,[-,-]_1,[-,-]_2,\alpha,\beta\right)$ 是相容正则 BiHom-李代数，因此 $[-,-]_1,[-,-]_2$ 满足等式(3.1)，即上式得 0，所以 $\left(g,ad_1,ad_2,\alpha,\beta\right)$ 满足等式(3.2)，所以 $\left(g,ad_1,ad_2,\alpha,\beta\right)$ 是 $\left(g,[-,-]_1,[-,-]_2,\alpha,\beta\right)$ 的表示。证毕。

定理 3.3 设 $\left(g,[-,-]_1,[-,-]_2,\alpha,\beta\right)$ 是相容的 BiHom-李代数，$\left(V,\rho_1,\rho_2,\alpha_V,\beta_V\right)$ 是 $\left(g,[-,-]_1,[-,-]_2,\alpha,\beta\right)$ 的表示，定义 $\rho_i^*:g\to End\left(V^*\right)$，其中 $\rho_i^*(x)(f)=-f\circ\rho_i(x)\left(i=1,2,\forall f\in V^*,x\in g\right)$，则 $\left(V^*,\rho_1^*,\rho_2^*,\alpha_V^*,\beta_V^*\right)$ 是 $\left(g,[-,-]_1,[-,-]_2,\alpha,\beta\right)$ 的表示当且仅当 ρ_1,ρ_2 满足等式(2.7)~(2.8)，且 $\forall x,y\in g$，

$$\begin{aligned}&\beta_V\circ\rho_1\left(\left[\beta(x),y\right]_2\right)+\beta_V\circ\rho_2\left(\left[\beta(x),y\right]_1\right)+\rho_2(y)\rho_1\left(\alpha\beta(x)\right)\\&+\rho_1(y)\rho_2\left(\alpha\beta(x)\right)-\rho_2\left(\alpha(x)\right)\rho_1\left(\beta(y)\right)-\rho_1\left(\alpha(x)\right)\rho_2\left(\beta(y)\right)=0\end{aligned}\text{。}\tag{3.3}$$

证明 由定义 3.2，$\left(V^*,\rho_1^*,\rho_2^*,\alpha_V^*,\beta_V^*\right)$ 是 $\left(g,[-,-]_1,[-,-]_2,\alpha,\beta\right)$ 的表示当且仅当 $\left(V^*,\rho_i^*,\alpha_V^*,\beta_V^*\right)$ 是 $\left(g,[-,-]_i,\alpha,\beta\right)(i=1,2)$ 的表示，并且 $\rho_1^*,\rho_2^*,\alpha_V^*,\beta_V^*$ 满足等式(3.2)。由命题 2.3 得 $\left(V^*,\rho_i^*,\alpha_V^*,\beta_V^*\right)$ 是 $\left(g,[-,-]_i,\alpha,\beta\right)(i=1,2)$ 的表示当且仅当 ρ_1,ρ_2 满足等式(2.7)~(2.8)。由于 $\forall x,y\in g,f\in V^*,u\in V$，

$$\begin{aligned}&\left\langle\left(\rho_1^*\left(\left[\beta(x),y\right]_2\right)\beta_V^*+\rho_2^*\left(\left[\beta(x),y\right]_1\right)\beta_V^*+\rho_1^*\left(\beta(y)\right)\rho_2^*\left(\alpha(x)\right)\right.\right.\\&\left.\left.+\rho_2^*\left(\beta(y)\right)\rho_1^*\left(\alpha(x)\right)-\rho_1^*\left(\alpha\beta(x)\right)\rho_2^*(y)-\rho_2^*\left(\alpha\beta(x)\right)\rho_1^*(y)\right)f,u\right\rangle\\&=\left\langle f,\left(-\beta_V\circ\rho_1\left(\left[\beta(x),y\right]_2\right)-\beta_V\circ\rho_2\left(\left[\beta(x),y\right]_1\right)+\rho_2\left(\alpha(x)\right)\rho_1\left(\beta(y)\right)\right.\right.\\&\left.\left.+\rho_1\left(\alpha(x)\right)\rho_2\left(\beta(y)\right)-\rho_2(y)\rho_1\left(\alpha\beta(x)\right)-\rho_1(y)\rho_2\left(\alpha\beta(x)\right)\right)(u)\right\rangle\end{aligned},$$

所以 $\rho_1^*,\rho_2^*,\alpha_V^*,\beta_V^*$ 满足等式(3.2)当且仅当 $\rho_1,\rho_2,\alpha_V,\beta_V$ 满足等式(3.3)。证毕。

定理 3.4 设 $(g,[-,-]_1,[-,-]_2,\alpha,\beta)$ 是相容的 BiHom-李代数，$(V,\rho_1,\rho_2,\alpha_V,\beta_V)$ 是它的表示，α_V,β_V 可逆，定义 $\rho_i^\circ: g\to End(V^*)$，其中

$$\rho_i^\circ(x)=\rho_i^*(\alpha\beta(x))(\beta_V^{-2})^*(i=1,2,x\in g),$$

则 $\left(V^*,\rho_1^\circ,\rho_2^\circ,(\alpha_V^{-1})^*,(\beta_V^{-1})^*\right)$ 是 $(g,[-,-]_1,[-,-]_2,\alpha,\beta)$ 的表示，称为 $(V,\rho_1,\rho_2,\alpha_V,\beta_V)$ 的对偶表示。

证明 由定义 3.2，$\left(V^*,\rho_1^\circ,\rho_2^\circ,(\alpha_V^{-1})^*,(\beta_V^{-1})^*\right)$ 是相容 BiHom-李代数 $(g,[-,-]_1,[-,-]_2,\alpha,\beta)$ 的表示当且仅当 $\left(V^*,\rho_i^\circ,(\alpha_V^{-1})^*,(\beta_V^{-1})^*\right)$ 是 $(g,[-,-]_i,\alpha,\beta)(i=1,2)$ 的表示，并且 $\rho_1^\circ,\rho_2^\circ,(\alpha_V^{-1})^*,(\beta_V^{-1})^*$ 满足等式(3.2)。由命题 2.4 知 $\left(V^*,\rho_i^\circ,(\alpha_V^{-1})^*,(\beta_V^{-1})^*\right)$ 是 $(g,[-,-]_i,\alpha,\beta)(i=1,2)$ 的表示。因为 $\rho_1,\rho_2,\alpha_V,\beta_V$ 满足等式(2.5)，且 β_V 可逆，所以 $\forall x,y\in g, f\in V^*,u\in V$，

$$\begin{aligned}&\Big\langle\Big(\rho_1^\circ([\beta(x),y]_2)(\beta_V^{-1})^*+\rho_2^\circ([\beta(x),y]_1)(\beta_V^{-1})^*+\rho_1^\circ(\beta(y))\rho_2^\circ(\alpha(x))\\&+\rho_2^\circ(\beta(y))\rho_1^\circ(\alpha(x))-\rho_1^\circ(\alpha\beta(x))\rho_2^\circ(y)-\rho_2^\circ(\alpha\beta(x))\rho_1^\circ(y)\Big)f,u\Big\rangle\\&=\beta_V^{-3}\Big(-\rho_1\left[\alpha\beta^2(x),\alpha\beta(y)\right]_2\beta_V-\rho_2\left[\alpha\beta^2(x),\alpha\beta(y)\right]_1\beta_V+\rho_2(\alpha^2\beta^2(x))\rho_1(\alpha\beta(y))\\&\quad+\rho_1(\alpha^2\beta^2(x))\rho_2(\alpha\beta(y))-\rho_2(\alpha\beta^2(y))\rho_1(\alpha^2\beta(x))-\rho_1(\alpha\beta^2(y))\rho_2(\alpha^2\beta(x))\Big)\beta_V^{-1}\end{aligned},$$

令 $a=\alpha\beta(x),b=\alpha\beta(y)$，因为 $(V,\rho_1,\rho_2,\alpha_V,\beta_V)$ 是 $(g,[-,-]_1,[-,-]_2,\alpha,\beta)$ 的表示，所以 ρ_1,ρ_2 满足等式(3.2)，所以上式等于 0，即 $\rho_1^\circ,\rho_2^\circ,(\alpha_V^{-1})^*,(\beta_V^{-1})^*$ 满足等式(3.2)。因此 $\left(V^*,\rho_1^\circ,\rho_2^\circ,(\alpha_V^{-1})^*,(\beta_V^{-1})^*\right)$ 是相容 BiHom-李代数 $(g,[-,-]_1,[-,-]_2,\alpha,\beta)$ 的表示。

推论 3.1 设 $(g,[-,-]_1,[-,-]_2,\alpha,\beta)$ 是相容的正则 BiHom-李代数，则 $\left(g^*,ad_1^\circ,ad_2^\circ,(\alpha^{-1})^*,(\beta^{-1})^*\right)$ 是 $(g,[-,-]_1,[-,-]_2,\alpha,\beta)$ 的表示。

证明 由例 3.1 知 $(g,ad_1,ad_2,\alpha,\beta)$ 是相容正则 BiHom-李代数 $(g,[-,-]_1,[-,-]_2,\alpha,\beta)$ 的表示，所以由定理 3.4 知 $\left(g^*,ad_1^\circ,ad_2^\circ,(\alpha^{-1})^*,(\beta^{-1})^*\right)$ 是 $(g,[-,-]_1,[-,-]_2,\alpha,\beta)$ 的表示。

4. BiHom-李代数的形变

定理 4.1 $(g,[-,-],\alpha,\beta)$ 为 BiHom-李代数，$\omega: g\otimes g\to g$ 为双线性映射，定义

$$[x,y]_t=[x,y]+t\omega(x,y)(\forall x,y\in g),\tag{4.1}$$

t 为参数，则 $(g,[-,-]_t,\alpha,\beta)$ 是 BiHom-李代数当且仅当对于 $\forall x,y,z\in g$ 有

$$\alpha\omega(x,y)=\omega(\alpha(x),\alpha(y)),\quad \beta\omega(x,y)=\omega(\beta(x),\beta(y)),\tag{4.2}$$

$$\omega(\beta(x),\alpha(y))=-\omega(\beta(y),\alpha(x)),\tag{4.3}$$

$$\omega(\beta^2(x),\omega(\beta(y),\alpha(z)))+\omega(\beta^2(y),\omega(\beta(z),\alpha(x)))+\omega(\beta^2(z),\omega(\beta(x),\alpha(y)))=0,\tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}&\left[\beta^2(x),\omega(\beta(y),\alpha(z))\right]+\omega(\beta^2(x),[\beta(y),\alpha(z)])+\left[\beta^2(y),\omega(\beta(z),\alpha(x))\right]\\&+\omega(\beta^2(y),[\beta(z),\alpha(x)])+\left[\beta^2(z),\omega(\beta(x),\alpha(y))\right]+\omega(\beta^2(z),[\beta(x),\alpha(y)])=0\end{aligned},\tag{4.5}$$

此时称 $(g,[-,-]_t,\alpha,\beta)$ 为 BiHom-李代数 $(g,[-,-],\alpha,\beta)$ 的形变。

证明 由 $[-,-]_t$ 的定义知 $[-,-]_t$ 是双线性的。由定义 2.1，$(g,[-,-]_t,\alpha,\beta)$ 是 BiHom-李代数当且仅当 $[-,-]_t$ 满足等式(2.1)~(2.4)。$\alpha\beta=\beta\alpha$ 显然成立。由于 $[-,-]$ 满足等式(2.4)，所以 $\forall x,y\in g$，

$$\alpha[x,y]_t-[\alpha(x),\alpha(y)]_t=t\alpha\omega(x,y)-t\omega(\alpha(x),\alpha(y)),$$

$$\beta[x,y]_t-[\beta(x),\beta(y)]_t=t\beta\omega(x,y)-t\omega(\beta(x),\beta(y)),$$

因此$[-,-]_t$满足等式(2.4)当且仅当等式(4.2)成立。由于$[-,-]$满足等式(2.2)，所以

$$[\beta(x),\alpha(y)]_t+[\beta(y),\alpha(x)]_t=t\omega(\beta(x),\alpha(y))+t\omega(\beta(y),\alpha(x)),$$

因此$[-,-]_t$满足等式(2.2)当且仅当等式(4.3)成立。因为$\forall x,y,z\in g$，$[-,-]$满足等式(2.3)，因此

$$\begin{aligned}&[\beta^2(x),[\beta(y),\alpha(z)]_t]_t+[\beta^2(y),[\beta(z),\alpha(x)]_t]_t+[\beta^2(z),[\beta(x),\alpha(y)]_t]_t\\&=t\Big([\beta^2(x),\omega(\beta(y),\alpha(z))]+\omega(\beta^2(x),[\beta(y),\alpha(z)])+[\beta^2(y),\omega(\beta(z),\alpha(x))]\\&\quad+\omega(\beta^2(y),[\beta(z),\alpha(x)])+[\beta^2(z),\omega(\beta(x),\alpha(y))]+\omega(\beta^2(z),[\beta(x),\alpha(y)])\Big)\\&\quad+t^2\Big(\omega(\beta^2(x),\omega(\beta(y),\alpha(z)))+\omega(\beta^2(y),\omega(\beta(z),\alpha(x)))+\omega(\beta^2(z),\omega(\beta(x),\alpha(y)))\Big)\end{aligned},$$

由t的任意性，$[-,-]_t$满足等式(2.3)当且仅当等式(4.4)~(4.5)成立。证毕。

定理4.2 设$(g,[-,-],\alpha,\beta)$是BiHom-李代数，$(V,\rho,\alpha_V,\beta_V)$是$(g,[-,-],\alpha,\beta)$的表示，$\omega:g\otimes g\to g$为双线性映射且满足等式(4.1)~(4.5)，$\sigma:g\to End(V)$为线性映射，定义$\rho^t:g\to End(V)$，其中

$$\rho^t(x)=\rho(x)+t\sigma(x)(\forall x\in g),$$

t为参数，则对于(4.1)定义的$[-,-]_t$，$(V,\rho^t,\alpha_V,\beta_V)$是$(g,[-,-]_t,\alpha,\beta)$的表示当且仅当对于$\forall x,y\in g$恒有

$$\sigma(\alpha(x))\circ\alpha_V=\alpha_V\circ\sigma(x),\quad \sigma(\beta(x))\circ\beta_V=\beta_V\circ\sigma(x),\tag{4.6}$$

$$\sigma(\omega(\beta(x),y))\circ\beta_V=\sigma(\alpha\beta(x))\sigma(y)-\sigma(\beta(y))\sigma(\alpha(x)),\tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}&\rho\omega(\beta(x),y)\circ\beta_V+\sigma([\beta(x),y])\circ\beta_V\\&=\rho(\alpha\beta(x))\sigma(y)+\sigma(\alpha\beta(x))\rho(y)-\rho(\beta(y))\sigma(\alpha(x))-\sigma(\beta(y))\rho(\alpha(x))\end{aligned},\tag{4.8}$$

此时称$(V,\rho^t,\alpha_V,\beta_V)$是表示$(V,\rho,\alpha_V,\beta_V)$的形变。

证明 由定理4.1知$(g,[-,-]_t,\alpha,\beta)$是BiHom-李代数。α_V,β_V显然是可交换的。由定义2.2，$(V,\rho^t,\alpha_V,\beta_V)$是$(g,[-,-]_t,\alpha,\beta)$的表示当且仅当$\rho^t,\alpha_V,\beta_V$满足等式(2.5)~(2.6)。$\forall x\in g$，因为$\rho,\alpha_V,\beta_V$满足等式(2.5)，所以

$$\rho^t(\alpha(x))\circ\alpha_V-\alpha_V\circ\rho^t(x)=t\sigma(\alpha(x))\circ\alpha_V-t\alpha_V\circ\sigma(x),$$

$$\rho^t(\beta(x))\circ\beta_V-\beta_V\circ\rho^t(x)=t\sigma(\beta(x))\circ\beta_V-t\beta_V\circ\sigma(x),$$

因此ρ^t,α_V,β_V满足等式(2.5)当且仅当等式(4.6)成立。$\forall x,y\in g$，由于ρ,α_V,β_V满足等式(2.6)，因此

$$\begin{aligned}&\rho^t([\beta(x),y]_t)\circ\beta_V-\rho^t(\alpha\beta(x))\circ\rho^t(y)+\rho^t(\beta(y))\circ\rho^t(\alpha(x))\\&=t\Big(\rho\omega(\beta(x),y)\circ\beta_V+\sigma([\beta(x),y])\circ\beta_V-\rho(\alpha\beta(x))\sigma(y)-\sigma(\alpha\beta(x))\rho(y)+\rho(\beta(y))\sigma(\alpha(x))\\&\quad+\sigma(\beta(y))\rho(\alpha(x))\Big)+t^2\Big(\sigma(\omega(\beta(x),y))\circ\beta_V-\sigma(\alpha\beta(x))\sigma(y)+\sigma(\beta(y))\sigma(\alpha(y))\Big)\end{aligned},$$

由t的任意性知，ρ^t,α_V,β_V满足等式(2.6)当且仅当等式(4.7)~(4.8)成立。证毕。

注记 4.1 等式(4.2)~(4.4)说明(g,ω,α,β)是 BiHom-李代数；等式(4.5)说明$(g,[-,-],\alpha,\beta)$与(g,ω,α,β)是相容的 BiHom-李代数；等式(4.6)~(4.7)说明$(V,\sigma,\alpha_V,\beta_V)$是$(g,\omega,\alpha,\beta)$的表示；等式(4.8)说明$(V,\rho,\sigma,\alpha_V,\beta_V)$是相容 BiHom-李代数$(g,[-,-],\omega,\alpha,\beta)$的表示。

基金项目

辽宁师范大学教改项目 LS202002。

参考文献

[1] Graziani, G., Makhlouf, A., Menini, C. and Panaite, F. (2015) BiHom-Associative Algebras, BiHom-Lie Algebras and BiHom-Bialgebras. *Symmetry Integrability and Geometry*: *Methods and Applications*, **11**, 11-34. https://doi.org/10.3842/SIGMA.2015.086

[2] Saadaoui, N. (2021) Split Extensions of BiHom-Lie Algebras. arXiv:2112.11995.

[3] Cheng, Y.S. and Qi, H.G. (2022) Representations of BiHom-Lie algebras. *Algebra Colloquium*, **29**, 125-142.

[4] Liu, J., Sheng, Y. and Bai, C. (2021) Maurer-Cartan Characterizations and Cohomologies of Compatible Lie Algebras. arXiv:2102.04742.

[5] Das, A. (2022) Cohomology and Deformations of Compatible Hom-Lie Algebras. arXiv:2202.03137.

[6] 李艳朋. BiHom-pre-Lie 代数的双模[D]: [硕士学位论文]. 大连: 辽宁师范大学, 2020.