Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(9), 1463-1473
Published Online September 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.129159

具有异质费用的动态古诺博弈

孙绍帅，刘佳伟，赵　昕，王　磊*

青岛大学，数学与统计学院，山东 青岛

收稿日期：2022年8月13日；录用日期：2022年9月9日；发布日期：2022年9月16日

摘　要

非对称微分博弈纳什均衡的求解及其性质的分析是博弈论中极具挑战的难题。本文提出具有异质(非对称)费用的动态古诺博弈模型，分别采用Pontryagin极大值原理和动态规划方法求得开环、闭环和反馈信息结构的纳什均衡，并重点分析了非对称纳什均衡的极限性质。当异质性通过费用函数的线性项表示时，纳什均衡的极限性质与对称情形是一致的。特别地，非对称的反馈纳什均衡仍然是渐近稳定的，这与Fershtman和Kamien的断言不同。当异质性通过费用函数的非线性项表示时，运用动态规划(值函数)方法不能得到反馈纳什均衡的解析解，此时非对称性对均衡极限性质的影响尚不明确。本文的理论突破了经典微分博弈纳什均衡求解和分析的界限，拓宽了应用。

关键词

动态垄断，微分博弈，异质费用，纳什均衡，渐近稳定性

Dynamic Cournot Game with Heterogeneous Costs

Shaoshuai Sun, Jiawei Liu, Xin Zhao, Lei Wang*

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong

Received: Aug. 13th, 2022; accepted: Sep. 9th, 2022; published: Sep. 16th, 2022

Abstract

The computation of Nash equilibrium for asymmetric differential games and the analysis of its properties are challenging problems in game theory. In this paper, a dynamic Cournot game model with heterogeneous (asymmetric) costs is proposed. The open-loop, closed-loop and feedback Nash equilibria are obtained using Pontryagin's maximum principle and dynamic programming method

*通讯作者。

文章引用: 孙绍帅, 刘佳伟, 赵昕, 王磊. 具有异质费用的动态古诺博弈[J]. 理论数学, 2022, 12(9): 1463-1473. DOI: 10.12677/pm.2022.129159

respectively, and the limit properties of asymmetric Nash equilibria are emphatically analyzed. When the heterogeneity is expressed by the linear term of the cost function, the limit property of the Nash equilibrium is consistent with the symmetric case. In particular, the asymmetric feedback Nash equilibrium is still asymptotically stable, which violates the assertion of Fershtman and Kamien. When the heterogeneity is expressed by the nonlinear term of the cost function, the analytic form of the feedback Nash equilibrium cannot be obtained by the dynamic programming (value function) method. In this case, the influence of asymmetry on the limit property of equilibrium is not clear. The theory of this paper breaks through the boundary of computation and analysis of Nash equilibrium in classical differential games and broadens its application.

Keywords

Dynamic Duopoly, Differential Game, Heterogeneous Cost, Nash Equilibrium, Asymptotic Stability

1. 引言

动态古诺博弈是近年来产业组织领域的热点研究方向(如文献[1] [2] [3] [4] [5])。Simaan 和 Takayama 在文[6]中首次采用微分博弈框架研究动态双寡头竞争。在此基础上，Fershtman 和 Kamien 在文[1]中研究了动态双寡头博弈的开环和反馈纳什均衡的极限性质。Dockner 在文[7]中将上述模型推广到 N 人博弈，并考察了当 N 趋于无穷时均衡的极限性质。Cellini 和 Lambertini [8]研究了具有差异化产品的动态古诺竞争。Dockner 和 Haug [9]，Driskill 和 McCafferty [10]则将动态古诺博弈模型应用于国际贸易问题。

上述文献中，博弈的对称性假设起着重要作用，它极大地简化了纳什均衡的求解。Fershtman 和 Kamien 在文[1]中研究反馈纳什均衡的极限性质时断言，只有对称的反馈纳什均衡才是渐近稳定的。一个基本的问题是：非对称性对上述动态博弈纳什均衡的求解及性质特别是极限性质会产生怎样的影响？导致博弈非对称性的因素是多方面的，如局中人的行为，信息，费用等。同时，非对称性带来了博弈分析的困难。特别是，非对称的微分博弈，不易求得纳什均衡的解析解。

作为对上述问题的研究，本文拟迈出首先的一步。假设局中人的费用具有异质性，考察非对称性对动态古诺博弈均衡性质，特别是极限性质的影响。我们首先提出一个具有异质费用的双寡头竞争微分博弈模型，费用的异质性通过费用函数的线性项给出。这一简单的设定，使得我们能够顺利求得开环，闭环和反馈三种信息结构的均衡产出和价格。不论基于哪种信息结构，具有较低成本的企业，拥有较高的均衡产出。尽管费用的异质性导致了不同的均衡产出和价格，但纳什均衡的极限性质与对称情形是一致的。特别地，非对称的反馈纳什均衡仍然是渐近稳定的，这与 Fershtman 和 Kamien 在文[1]中的断言不同。

在模型的扩展部分，我们进一步设定，费用的异质性通过费用函数的二次项给出。但费用的非线性带来了问题的本质困难，运用值函数方法我们不能得到反馈纳什均衡的解析解，均衡的极限性质尚不明确。

本文的结构安排如下：第二节引入基本模型。第三节到第五节分别研究开环，闭环和反馈纳什均衡及其性质。第六节考察扩展的模型并研究对应的开环，闭环和反馈纳什均衡及其性质。

2. 模型与记号

本文考虑一个具有异质费用的动态双寡头垄断市场：

$$C_i\left(u_i\left(t\right)\right)=c_iu_i\left(t\right)+\frac{1}{2}u_i^2\left(t\right), i=1,2, \tag{1}$$

其中 $u_i\left(t\right)\geq 0$ 表示第 i 个企业在时间 t 的产出。假设 $c_2>c_1$，表示两家企业的成本是异质的。

假设产品的当前价格 $p\left(t\right)$ 由下述微分方程描述：

$$\dot{p}\left(t\right)=s\left[a-\left(u_1\left(t\right)+u_2\left(t\right)\right)-p\left(t\right)\right], p\left(0\right)=p_0, \tag{2}$$

其中 $a>0$ 表示市场的规模，$s>0$ 表示常数价格调整速度，p_0 为给定的初始价格。方程(2)表示市场的价格是“粘性”的，即价格的变化率是当前市场价格 $p\left(t\right)$ 和静态逆需求函数 $p=a-\left(u_1\left(t\right)+u_2\left(t\right)\right)$ 所指示的价格水平之差的线性函数。

每个企业的目标是最大化：

$$J^i=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-rt}\left[p\left(t\right)u_i\left(t\right)-C_i\left(u_i\right)\right]\mathrm{d}t, i=1,2, \tag{3}$$

其中 $r>0$ 表示贴现率。

因此，(1)~(3)定义了一个具有线性二次结构的异质费用 2-人非零和微分博弈。

在本文的分析中，我们分别采用基于开环，闭环和反馈信息结构(策略空间)的纳什均衡作为微分博弈的解概念，参见文献[11] [12] [13] [14] [15]。

定义 1. (i) 局中人 i 的开环策略空间为

$$S_i^{ol}=\left\{u_i\left(t\right)\mid u_i\left(t\right)\text{关于}t\in\left[0,+\infty\right)\text{逐段连续}\right\}.$$

(ii) 局中人 i 的闭环(无记忆)策略空间为

$$\begin{aligned}S_i^{cl}=\Big\{&u_i\left(t,p,p_0\right)\mid u_i\left(t,p,p_0\right)\text{关于}t\text{逐段连续且对可积的}m\left(t\right)\geq 0\text{满足}\\&\left|u_i\left(t,p\right)-u_i\left(t,p'\right)\right|\leq m\left(t\right)\left|p-p'\right|\Big\}.\end{aligned}$$

(iii) 局中人 i 的反馈策略空间为

$$\begin{aligned}S_i^{fd}=\Big\{&u_i\left(t,p\right)\mid u_i\left(t,p\right)\text{关于}t\text{逐段连续且对可积的}m\left(t\right)\geq 0\text{满足}\\&\left|u_i\left(t,p\right)-u_i\left(t,p'\right)\right|\leq m\left(t\right)\left|p-p'\right|\Big\}.\end{aligned}$$

定义 2. 由(1)~(3)定义的 2-人微分博弈的纳什均衡为相应策略空间上满足下述条件的策略组合 $\left(u_i^*,u_j^*\right)$：

$$J^i\left(u_i^*,u_j^*\right)\geq J^i\left(u_i,u_j^*\right)\text{，对任意容许策略}u_i\text{，}i,j=1,2,i\neq j.$$

作为下文的参照，在异质费用的静态古诺博弈中，纳什均衡价格为

$$P_D^*=\frac{2a+c_1+c_2}{4}, \tag{4}$$

以及根据“边际费用等于价格”的原则得到的“竞争”价格为

$$P_C^*=\frac{a+c_1+c_2}{3}. \tag{5}$$

3. 开环纳什均衡

本节我们将计算上述微分博弈的开环纳什均衡，进一步探讨异质费用对企业均衡产出的影响，以及平稳开环纳什均衡价格与静态古诺均衡价格和竞争价格之间的关系。

定理 1. 由(1)~(3)定义的微分博弈存在唯一的平稳开环纳什均衡。均衡价格为

$$p_{ol}^{*}=\frac{as+\left(a+c_1+c_2\right)\left(s+r\right)}{s+3\left(s+r\right)}=\frac{4sP_D^{*}+3rP_C^{*}}{4s+3r}, \tag{6}$$

均衡产出为

$$u_1^{*}=\frac{\left[\left(a-c_1\right)\left(3s+2r\right)-\left(a-c_2\right)\left(s+r\right)\right]\left(s+r\right)}{\left(4s+3r\right)\left(2s+r\right)}, \tag{7}$$

$$u_2^{*}=\frac{\left[\left(a-c_2\right)\left(3s+2r\right)-\left(a-c_1\right)\left(s+r\right)\right]\left(s+r\right)}{\left(4s+3r\right)\left(2s+r\right)}. \tag{8}$$

证明 写出局中人 i 的当前值哈密顿函数：

$$H^{i}\left(p,u_i,\lambda_i,t\right)=p\left(t\right)u_i\left(t\right)-c_iu_i\left(t\right)-\frac{1}{2}u_i^2\left(t\right)+\lambda_i s\left[a-\left(u_i\left(t\right)+u_j\left(t\right)\right)-p\left(t\right)\right],\ i,j=1,2,i\neq j, \tag{9}$$

其中 λ_i 为伴随变量。

开环纳什均衡的必要条件为：

$$p\left(t\right)-c_i-u_i\left(t\right)-\lambda_i\left(t\right)s=0, \tag{10}$$

$$\dot{\lambda}_i=\lambda_i\left(t\right)\left(s+r\right)-u_i\left(t\right), \tag{11}$$

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-rt}\lambda_i\left(t\right)=0,i=1,2. \tag{12}$$

对(10)关于 t 求导并将(11)中 $\dot{\lambda}_i\left(t\right)$ 以及(10)中 $\lambda_i\left(t\right)$ 代入，得到

$$\dot{u}_i\left(t\right)=s\left(a-u_j\left(t\right)-p\left(t\right)\right)-\left(s+r\right)\left(p\left(t\right)-c_i-u_i\left(t\right)\right),i=1,2,i\neq j. \tag{13}$$

由于在平稳点处 $\dot{p}\left(t\right)=\dot{u}_1\left(t\right)=\dot{u}_2\left(t\right)=0$，运用(2)和(13)，得到(6)~(8)，完成定理 1 的证明。

推论 1. 由(1)~(3)定义的微分博弈，费用较低的企业拥有较高的开环均衡产出。

推论 2. 由(1)~(3)定义的微分博弈，当 $r\to0$ 或 $s\to\infty$ 时，平稳开环均衡价格收敛到静态古诺均衡价格；当 $s\to0$ 或 $r\to\infty$ 时，平稳开环均衡价格收敛到静态竞争价格，即

$$\lim_{s\to\infty}p_{ol}^{*}=\lim_{r\to0}p_{ol}^{*}=P_D^{*};\ \lim_{r\to\infty}p_{ol}^{*}=\lim_{s\to0}p_{ol}^{*}=P_C^{*}.$$

推论 3. 由(1)~(3)定义的微分博弈，渐进稳定的开环纳什均衡的价格轨迹为

$$p_{ol}^{e}\left(t\right)=p_{ol}^{*}+\left(p_0-p_{ol}^{*}\right)\mathrm{e}^{kt}, \tag{14}$$

其中 p_{ol}^{*} 是由(6)给出的平稳开环均衡价格，$k=-\frac{1}{2}\left[A+\left(A^2-4B\right)^{\frac{1}{2}}\right]<0$，$A=s-r$，$B=-s^2-3s\left(s+r\right)$。

证明 对(2)关于 t 求导，分别代入(10)，(11)以及(2)中的 $\lambda_i\left(t\right),\dot{\lambda}_i\left(t\right)$ 和 u_i，得到

$$\ddot{p}+A\dot{p}+Bp=R, \tag{15}$$

其中 $A=s-r$，$B=-s^2-3s\left(s+r\right)$，$R=-\left[s^2a+s\left(c_1+c_2+a\right)\left(s+r\right)\right]$。

微分方程(15)的一个特解为 $p\left(t\right)=R/B$，恰为平稳的开环纳什均衡价格。(15)对应的特征方程为

$$\mu^2+A\mu+B=0. \tag{16}$$

解得方程(16)有两个实根：一个正根，一个负根(记为 k)。从而(14)给出博弈的渐进稳定开环纳什均衡价格轨迹。

4. 闭环纳什均衡

本节我们研究具有异质费用的闭环纳什均衡，得到闭环纳什均衡产出以及相应的平稳均衡价格，随后讨论平稳闭环纳什均衡价格的性质并与开环信息结构的结果进行比较。

定理 2. 由(1)~(3)定义的微分博弈存在唯一的平稳闭环纳什均衡。均衡价格为

$$p_{cl}^* = \frac{a(r+3s)+(r+2s)(c_1+c_2)}{3r+7s}, \tag{17}$$

均衡产出为

$$u_1^* = \frac{(a-c_1)(s^2+5sr+2r^2)+(a-c_2)(s^2-2sr-r^2)}{(7s+3r)(s+r)}, \tag{18}$$

$$u_2^* = \frac{(a-c_1)(s^2-2sr-r^2)+(a-c_2)(s^2+5sr+2r^2)}{(7s+3r)(s+r)}. \tag{19}$$

证明 写出局中人 i 的当前值哈密顿函数(9)以及闭环纳什均衡满足的伴随方程：

$$\dot{\lambda}_i = r\lambda_i - H_p^i - H_{u_j}^i \frac{\partial u_j}{\partial p}, i \neq j, i, j = 1,2, \tag{20}$$

即

$$\dot{\lambda}_i = \lambda_i(t)(s+r) - u_i(t) + s\lambda_j. \tag{21}$$

在定理 1 的证明中，我们用(21)代替(11)得到(17)~(19)。

推论 4. 由(1)~(3)定义的微分博弈，费用较低的企业拥有较高的闭环均衡产出；平稳的闭环纳什均衡价格低于开环均衡价格。

推论 5. 由(1)~(3)定义的微分博弈，当 $r \to 0$ 或 $s \to \infty$ 时，平稳的闭环均衡价格收敛到低于静态古诺均衡的价格；当 $s \to 0$ 或 $r \to \infty$ 时，平稳的闭环均衡价格收敛到静态竞争价格，即

$$\lim_{s\to\infty} p_{cl}^* = \lim_{r\to 0} p_{cl}^* = \frac{3a+2(c_1+c_2)}{7} < P_D^*;\ \lim_{r\to\infty} p_{cl}^* = \lim_{s\to 0} p_{cl}^* = \frac{a+c_1+c_2}{3} = P_C^*.$$

用(21)替代(11)，按照推论 3 的证明方法，我们得到推论 6。

推论 6. 由(1)~(3)定义的微分博弈，渐进稳定的闭环纳什均衡价格轨迹为

$$p_{cl}^e(t) = p_{cl}^* + (p_0 - p_{cl}^*)\mathrm{e}^{lt}, \tag{22}$$

其中 p_{cl}^* 是由(17)给出的平稳闭环均衡价格，常数 $l = \frac{1}{2}\left[r - \left(r^2 + 4s(3r+7s)\right)^{\frac{1}{2}}\right] < 0$。

注 1. 闭环解和开环解的差异来自于伴随方程(20)中的 $H_{u_j}^i \partial u_j / \partial p$ 项，这一项在开环信息结构中为零；在闭环信息结构中，该项非零，即伴随方程中包含了竞争对手的产出策略对当前价格的依赖性。

5. 反馈纳什均衡

本节我们研究反馈信息结构的纳什均衡及其性质。

定理 3. 由(1)~(3)定义的微分博弈存在一个非对称的全局渐近稳定的子博弈完美的反馈纳什均衡 $(u_1^*(p), u_2^*(p))$，其中

$$u_i^*(p) = \begin{cases} 0, & p \le \hat{p}_i, \\ (1-sK)p + (sE_i - c_i), & p > \hat{p}_i, \end{cases} \tag{23}$$

$$\hat{p}_i = \frac{c_i - sE_i}{1 - sK},\ i = 1,2, \tag{24}$$

$$K = \frac{r + 6s - \sqrt{(r+6s)^2 - 12s^2}}{6s^2}, \tag{25}$$

$$E_1 = \frac{2s^2K\left[c_2 - sK(a + 2c_2)\right] + \left[c_1 - sK(a+2c_1)\right](3s - s^2K + r)}{(3s + r + s^2K)(3s + r - 3s^2K)}, \tag{26}$$

$$E_2 = \frac{2s^2K\left[c_1 - sK(a + 2c_1)\right] + \left[c_2 - sK(a+2c_2)\right](3s - s^2K + r)}{(3s + r + s^2K)(3s + r - 3s^2K)}. \tag{27}$$

证明 首先考虑 $p_0 > \max\{\hat{p}_1, \hat{p}_2\}$ 的情形，此时博弈具有内点解。写出反馈均衡策略 (u_1^*, u_2^*) 满足的 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程：

$$rV^i(p) = \max_{u_i}\left\{(p - c_i)u_i - \frac{1}{2}u_i^2 + sV_p^i(p)\left[a - p - (u_i + u_j)\right]\right\}, i, j = 1,2, i \ne j, \tag{28}$$

其中 $V^i(p)$ 是从状态 p 开始的子博弈中局中人 i 的值函数。

最大化(28)式的右端，得到

$$u_i^* = p - c_i - sV_p^i(p), i = 1,2. \tag{29}$$

将(29)代入(28)，得到

$$\begin{aligned} rV^i(p) &= (p - c_i)(p - c_i - sV_p^i) - \frac{1}{2}(p - c_i - sV_p^i)^2 \\ &\quad + sV_p^i\left[a - p - (2p - 2c_i - sV_p^i - sV_p^j)\right], i, j = 1,2, i \ne j. \end{aligned} \tag{30}$$

我们提出二次值函数：

$$V^i(p) = \frac{1}{2}K_i p^2 - E_i p + g_i, \tag{31}$$

则 $V_p^i(p) = K_i p - E_i$， $i = 1,2$ 。

将 $V^i(p)$ 和 $V_p^i(p)$ 代入(30)，得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}rK_i p^2 - rE_i p + rg_i &= \left(\frac{1}{2} - 3sK_i + s^2K_iK_j + \frac{1}{2}s^2K_i^2\right)p^2 \\ &\quad + \left[3sE_i - s^2K_iE_i - 2s^2K_iE_j - c_i + sK_i(a + 2c_i)\right]p \\ &\quad + \frac{1}{2}c_i^2 + \left(\frac{1}{2}sE_i + sE_j - a - 2c_i\right)E_i s. \end{aligned} \tag{32}$$

比较(32)中 p^2 的系数，我们有

$$s^2K_i^2 + (2s^2K_j - 6s - r)K_i + 1 = 0, i, j = 1,2, i \ne j. \tag{33}$$

由(33)得到

$$(K_1 - K_2)\left[s^2(K_1 + K_2) - (r + 6s)\right] = 0, \tag{34}$$

意味着 $K_1 = K_2$ 或 $s^2(K_1 + K_2) = (r + 6s)$ 。

情形 1 $K_1 \ne K_2$， $s^2(K_1 + K_2) = (r + 6s)$，从而 $E_1 \ne E_2$， $g_1 \ne g_2$， $u_1^* \ne u_2^*$。将(29)中 u_1^* 和 u_2^* 代入(2)，

$$\dot{p}-sp\left[s\left(K_1+K_2\right)-3\right]=s\left[a+c_1+c_2-s\left(E_1+E_2\right)\right]. \tag{35}$$

(35)的一个特解为

$$\overline{p}=\frac{a+c_1+c_2-s\left(E_1+E_2\right)}{3-s\left(K_1+K_2\right)},$$

其完全解为

$$p(t)=\overline{p}+\left(p_0-\overline{p}\right)\mathrm{e}^{s\left[s\left(K_1+K_2\right)-3\right]t}. \tag{36}$$

若 $s\left(K_1+K_2\right)-3<0$，当 $t\to\infty$ 时 $p(t)$ 将收敛于 $\overline{p}$。由于 $s^2\left(K_1+K_2\right)=(r+6s)$，得 $r+3s<0$，这与 r,s 非负相矛盾。

情形 2 $K_1=K_2$。由于 $c_1\neq c_2$，所以 $E_1\neq E_2$， $g_1\neq g_2$， $u_1^*\neq u_2^*$。(2)的完全解为

$$p(t)=\overline{p}+\left(p_0-\overline{p}\right)\mathrm{e}^{s\left[2(sK-1)-1\right]t}, \tag{37}$$

其中

$$\overline{p}=\frac{a+c_1+c_2-s\left(E_1+E_2\right)}{2(1-sK)+1}.$$

若 $2(sK-1)-1<0$，当 $t\to\infty$ 时 $p(t)$ 将收敛于 $\overline{p}$。因此(37)渐近稳定的必要条件是 $K<3/2s$。令 $K_1=K_2=K$，(33)的解为

$$K=\frac{r+6s\pm\sqrt{(r+6s)^2-12s^2}}{6s^2}. \tag{38}$$

由必要条件排除(38)的正项，则 K 由(25)给出。

通过(32)，我们得到分别由(26)和(27)给出的 E_1 和 E_2。将 $V_p^i(p)$ 代入(29)，得到

$$u_i^*(p)=(1-sK)p+\left(sE_i-c_i\right),i=1,2.$$

其次考虑 $p_0\leq\min\left\{\hat{p}_1,\hat{p}_2\right\}$，此时博弈不具有内点解，证明类似于文献[1]。

推论 8. 由(1)~(3)定义的微分博弈，费用较低的企业拥有较高的反馈纳什均衡产出。

推论 9. 由(1)~(3)定义的微分博弈存在平稳的反馈纳什均衡价格：

$$p_{fd}^*=\frac{a+c_1+c_2-s\left(E_1+E_2\right)}{2(1-sK)+1}. \tag{39}$$

推论 10. 由(1)~(3)定义的微分博弈，当 $s\to\infty$ 或 $r\to 0$ 时，平稳的子博弈完美的反馈纳什均衡价格收敛到一个低于静态古诺均衡的价格：

$$p^*=\frac{P_C^*+2\sqrt{2/3}P_D^*}{1+2\sqrt{2/3}}.$$

证明 令 $\lim\limits_{s\to\infty}sK=\beta$， $\lim\limits_{s\to\infty}sE_i=\gamma_i$， $i=1,2$，通过(25)~(27)，我们有

$$\beta=1-\sqrt{2/3},$$

$$\gamma_1=\frac{2\beta\left[c_2-\left(a+2c_2\right)\beta\right]+(3-\beta)\left[c_1-\left(a+2c_1\right)\beta\right]}{(3+\beta)(3-3\beta)},$$

$$\gamma_2 = \frac{2\beta\left[c_1-(a+2c_1)\beta\right]+(3-\beta)\left[c_2-(a+2c_2)\beta\right]}{(3+\beta)(3-3\beta)}.$$

同时，$\lim_{r\to 0} sK=\beta$，$\lim_{r\to 0} sE_i=\gamma_i$。因此，

$$\lim_{s\to\infty} p_{fd}^{*}=\lim_{r\to 0} p_{fd}^{*}=\frac{a+c_1+c_2-\gamma_1-\gamma_2}{3-2\beta}=\frac{P_C^*+2\sqrt{2/3}P_D^*}{1+2\sqrt{2/3}}.$$

推论 11. 由(1)~(3)定义的微分博弈，渐进稳定的子博弈完美的反馈纳什均衡价格轨迹为

$$p_{fd}^{e}(t)=p_{fd}^{*}+\left(p_0-p_{fd}^{*}\right)\mathrm{e}^{s[2(sK-1)-1]t}, \tag{40}$$

其中 p_{fd}^{*} 是由(39)给出的平稳反馈纳什均衡价格，K 由(25)确定。

6. 模型的扩展

接下来我们假设费用的异质性通过费用函数的二次项表示，即

$$C_i(u_i)=\frac{1}{2}d_i u_i^2, i=1,2, \tag{41}$$

其中 $d_2>d_1>0$。因此，(41)和(2)~(3)定义了一个新的具有异质费用的微分博弈。

此时对应的静态古诺均衡价格以及“竞争”价格分别为

$$P_D^{\dagger}=\frac{a(1+d_1)(1+d_2)}{(2+d_1)(2+d_2)-1};\ P_C^{\dagger}=\frac{ad_1d_2}{(1+d_1)(1+d_2)-1}.$$

分别按照定理 1 和定理 2 的方法，我们得到定理 4 和定理 5。以此为基础，我们分析开环和闭环信息的纳什均衡的极限性质。

定理 4. 由(41)和(2)~(3)定义的微分博弈，存在唯一的平稳开环纳什均衡。均衡价格为

$$p_{ol}^{\dagger}=\frac{a\left[(d_1+1)s+d_1r\right]\left[(d_2+1)s+d_2r\right]}{\left[s+(d_1+1)(r+s)\right]\left[s+(d_2+1)(r+s)\right]-(r+s)^2}, \tag{42}$$

均衡产出为

$$u_1^{\dagger}=\frac{\left[as+ad_2(r+s)\right](s+r)}{\left[s+(d_1+1)(r+s)\right]\left[s+(d_2+1)(r+s)\right]-(r+s)^2}, \tag{43}$$

$$u_2^{\dagger}=\frac{\left[as+ad_1(r+s)\right](s+r)}{\left[s+(d_1+1)(r+s)\right]\left[s+(d_2+1)(r+s)\right]-(r+s)^2}. \tag{44}$$

推论 12. 由(41)和(2)~(3)定义的微分博弈，当 $r\to 0$ 或 $s\to\infty$ 时，平稳开环纳什均衡价格收敛到静态古诺均衡价格；当 $s\to 0$ 或 $r\to\infty$ 时，该价格收敛到静态竞争价格，即

$$\lim_{s\to\infty} p_{ol}^{\dagger}=\lim_{r\to 0} p_{ol}^{\dagger}=P_D^{\dagger};\ \lim_{r\to\infty} p_{ol}^{\dagger}=\lim_{s\to 0} p_{ol}^{\dagger}=P_C^{\dagger}.$$

定理 5. 由(41)和(2)~(3)定义的微分博弈，存在唯一的平稳闭环纳什均衡。均衡价格为

$$p_{cl}^{\dagger}=\frac{a\left\{s^2(d_1d_2-1)+s(s+r)\left[d_1\left(d_2^2-1\right)+d_2\left(d_1^2-1\right)\right]+(r+s)^2d_1d_2(d_1d_2-1)+d_1d_2r(r+2s)+s(d_1+d_2)(r+s)+s^2\right\}}{\left[s(1+d_2)+(r+s)d_2(1+d_1)\right]\left[s(1+d_1)+(r+s)d_1(1+d_2)\right]-\left[d_2(r+2s)+s\right]\left[d_1(r+2s)+s\right]}, \tag{45}$$

均衡产出为

$$u_1^\dagger=\frac{a\left\{\left[d_2(r+s)+s\right]\left[s\left(1+d_1+(r+s)d_1(1+d_2)\right)\right]-\left[d_2(r+2s)+s\right]\left[d_1(r+s)+s\right]\right\}}{\left[s(1+d_2)+(r+s)d_2(1+d_1)\right]\left[s(1+d_1)+(r+s)d_1(1+d_2)\right]-\left[d_2(r+2s)+s\right]\left[d_1(r+2s)+s\right]}, \tag{46}$$

$$u_2^\dagger=\frac{a\left\{\left[d_1(r+s)+s\right]\left[s\left(1+d_2+(r+s)d_2(1+d_1)\right)\right]-\left[d_1(r+2s)+s\right]\left[d_2(r+s)+s\right]\right\}}{\left[s(1+d_2)+(r+s)d_2(1+d_1)\right]\left[s(1+d_1)+(r+s)d_1(1+d_2)\right]-\left[d_2(r+2s)+s\right]\left[d_1(r+2s)+s\right]}. \tag{47}$$

推论 13. 由(41)和(2)~(3)定义的微分博弈，当 $r\to 0$ 或 $s\to\infty$ 时，平稳闭环纳什均衡价格收敛到低于静态古诺均衡的价格；当 $s\to 0$ 或 $r\to\infty$ 时，该价格收敛到静态竞争价格，即

$$\lim_{s\to\infty}p_{cl}^\dagger=\lim_{r\to 0}p_{cl}^\dagger=\frac{a(d_1+d_2+d_1d_2)}{2+2d_1+2d_2+d_1d_2}<P_D^\dagger;\ \lim_{r\to\infty}p_{cl}^\dagger=\lim_{s\to 0}p_{cl}^\dagger=\frac{ad_1d_2}{(1+d_1)(1+d_2)-1}=P_C^\dagger.$$

在反馈信息的情形，我们采用值函数方法得到定理 6，反馈纳什均衡通过 Riccati 型方程给出。

定理 6. 由(41)和(2)~(3)定义的微分博弈，存在一个反馈纳什均衡 $\left(u_1^\dagger(p),u_2^\dagger(p)\right)$，其中

$$u_i^\dagger(p)=\begin{cases}0, & p\le\tilde{p}_i,\\ \dfrac{1}{d_i}\left[(1-sL_i)p+sF_i\right], & p>\tilde{p}_i,\end{cases} \tag{48}$$

$$\tilde{p}_i=\frac{sF_i}{sL_i-1},i=1,2, \tag{49}$$

L_1,L_2 由下列方程组决定

$$\begin{cases}d_2+s^2d_2L_1^2+2s^2d_1L_1L_2-2sL_1(d_1+d_2)-(2s+r)L_1d_1d_2=0,\\ d_1+s^2d_1L_2^2+2s^2d_2L_1L_2-2sL_2(d_1+d_2)-(2s+r)L_2d_1d_2=0,\end{cases} \tag{50}$$

F_1,F_2 分别为

$$F_1=-\frac{ad_1d_2sL_1\left(d_1s+d_2s+d_1d_2r+d_1d_2s+L_1d_1s^2-L_1d_2s^2-L_2d_1s^2\right)}{M}, \tag{51}$$

$$F_2=-\frac{ad_1d_2sL_2\left(d_1s+d_2s+d_1d_2r+d_1d_2s-L_2d_1s^2\right)}{M}, \tag{52}$$

其中

$$\begin{aligned}M=&\left(-L_1^2d_1d_2+L_1^2d_2^2-L_1L_2d_1^2+2L_1L_2d_1d_2+2L_2d_1^2\right)s^4\\&+\left(L_1d_1^2-2L_1d_2^2-3L_2d_1^2-L_1d_1d_2-3L_2d_1d_2-2L_1d_1d_2^2+L_1d_1^2d_2-3L_2d_1^2d_2\right)s^3\\&+\left(2d_1d_2+2d_1d_2^2+2d_1^2d_2+d_1^2+d_2^2+d_1^2d_2^2-2L_1d_1d_2^2r+L_1d_1^2d_2r-3L_2d_1^2d_2r\right)s^2\\&+\left(2rd_1^2d_2^2+2rd_1^2d2+2rd_1d_2^2\right)s+d_1^2d_2^2r^2.\end{aligned}$$

证明 首先考虑 $p_0>\max\{\tilde{p}_1,\tilde{p}_2\}$ 的情形，此时博弈具有内点解。写出反馈均衡策略 $\left(u_1^\dagger,u_2^\dagger\right)$ 满足的 HJB 方程：

$$rV^i(p)=\max_{u_i}\left\{pu_i-\frac{1}{2}d_iu_i^2+sV_p^i(p)\left[a-p-\left(u_i+u_j\right)\right]\right\},i,j=1,2,i\ne j, \tag{53}$$

其中 $V^i(p)$ 是从状态 p 开始的子博弈中局中人 i 的值函数。

最大化(53)式的右端，得到

$$u_i^{\dagger}=\frac{1}{d_i}\left[p-sV_p^i\left(p\right)\right],i=1,2. \tag{54}$$

将(54)代入(53)，得到

$$\begin{aligned} rV^i\left(p\right)&=\frac{1}{d_i}\left(p^2-spV_p^i\right)-\frac{1}{2d_i}\left(p-sV_p^i\right)^2\\ &\quad+sV_p^i\left[a-p-p\left(\frac{1}{d_i}+\frac{1}{d_j}\right)+s\left(\frac{V_p^i}{d_i}+\frac{V_p^j}{d_j}\right)\right],i,j=1,2,i\neq j. \end{aligned} \tag{55}$$

我们提出二次值函数：

$$V^i\left(p\right)=\frac{1}{2}L_ip^2-F_ip+h_i, \tag{56}$$

则 $V_p^i\left(p\right)=L_ip-F_i$， $i=1,2$ 。

将 $V^i\left(p\right)$ 和 $V_p^i\left(p\right)$ 代入(55)，得到

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}rL_ip^2-rF_ip+rh_i\\ &=\left[\frac{1-sL_i}{d_1}-\frac{\left(1-sL_i\right)^2}{2d_i}-sL_i\left(\frac{d_i+d_j}{d_id_j}-\frac{s\left(d_iL_j+d_jL_i\right)}{d_id_j}+1\right)\right]p^2\\ &\quad+\left\{sL_i\left[a-\frac{sd_j\left(d_iF_j+d_jF_i\right)}{d_i}\right]+sF_i\left[\frac{d_i+d_j}{d_id_j}-\frac{s\left(d_iL_j+d_jL_i\right)}{d_id_j}+1\right]+\frac{sF_i}{d_i}+\frac{sF_i\left(sL_i-1\right)}{d_i}\right\}p\\ &\quad-sF_i\left(a-\frac{sd_j\left(d_iF_j+d_jF\right)}{d_i}\right)-\frac{s^2F^2}{2d_i},i,\ j=1,2,i\neq j. \end{aligned} \tag{57}$$

比较(57)中 p^2 的系数， L_1,L_2 由方程组(50)决定。比较(57)中 p 的系数，可得 F_1,F_2 分别由(51)和(52)给出。其次考虑 $p_0\leq\min\left\{\tilde{p}_1,\tilde{p}_2\right\}$ 的情形，此时博弈不具有内点解，证明类似于文[1]。

注 2. 当异质性是通过费用函数的非线性项给出时，按照定理 6 的结果，运用值函数方法不能获得反馈纳什均衡的解析解，均衡的极限性质无法得到分析。非对称微分博弈反馈纳什均衡的求解及其性质分析仍是极具挑战的开问题。

参考文献

[1] Fershtman, C. and Kamien, M. (1987) Dynamic Duopolistic Competition with Sticky Prices. *Econometrica*, **55**, 1151-1164. https://doi.org/10.2307/1911265

[2] Cabral, L. (2012) Oligopoly Dynamics. *International Journal of Industrial Organization*, **30**, 278-282. https://doi.org/10.1016/j.ijindorg.2011.12.009

[3] Colombo, L. and Labrecciosa, P. (2021) A Stochastic Differential Game of Duopolistic Competition with Sticky Prices. *Journal of Economic Dynamics & Control*, **122**, Article ID: 104030. https://doi.org/10.1016/j.jedc.2020.104030

[4] Hoof, S. (2021) Dynamic Monopolistic Competition: A Steady-State Analysis. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **189**, 560-577. https://doi.org/10.1007/s10957-021-01843-w

[5] Kańska, K. and Wiszniewska-Matyszkiel, A. (2021) Dynamic Stackelberg Duopoly with Sticky Prices and a Myopic Follower. *Operational Research*, **22**, 4221-4252. https://doi.org/10.1007/s12351-021-00665-y

[6] Simaan, M. and Takayama, T. (1987) Game Theory Applied to Dynamic Duopoly Problems with Productions Constraints. *Automatica*, **14**, 161-166. https://doi.org/10.1016/0005-1098(78)90022-5

[7] Dockner, E.J. (1988) On the Relation between Dynamic Oligopolistic Competition and Long-Run Competitive Equilibrium. *European Journal of Political Economy*, **4**, 47-64. https://doi.org/10.1016/S0176-2680(88)80016-8

[8] Cellini, R. and Lambertini, L. (2007) A Differential Oligopoly Game with Differentiated Goods and Sticky Prices. *European Journal of Operational Research*, **176**, 1131-1144. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2005.09.013

[9] Dockner, E.J. and Haug, A. (1990) Tariffs and Quotas under Dynamic Duopolistic Competition. *Journal of International Economics*, **29**, 147-159. https://doi.org/10.1016/0022-1996(90)90069-X

[10] Driskill, R. and McCafferty, S. (1996) Industrial Policy and Duopolistic Trade with Dynamic Demand. *Review of Industrial Organization*, **11**, 355-373. https://doi.org/10.1007/BF00414404

[11] Starr, A.W. and Ho, Y.C. (1969) Nonzero-Sum Differential Games. *Journal of Optimization Theory and Application*, **3**, 184-208. https://doi.org/10.1007/BF00929443

[12] Reinganum, J.F. and Stokey, N. (1985) Oligopoly Extraction of a Common Property the Importance of the Period of Commitment in Dynamic Games. *International Economic Review*, **26**, 161-173. https://doi.org/10.2307/2526532

[13] Mehlmann, A. (1988) Applied Differential Games. Plenum Press, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4899-3731-5

[14] Basar, T. and Olsder, G.J. (1999) Dynamic Noncooperative Game Theory. Classics in Applied Mathematics, 2nd Edition, SIAM, Philadelphia. https://doi.org/10.1137/1.9781611971132

[15] Dockner, E.J., Jørgensen, S., Long, N.V. and Sorger, G. (2000) Differential Games in Economics and Management Science, Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511805127