Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(11), 3316-3324
Published Online November 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1311344

Hans汉斯

中间意义上的渐近非扩张映射的公共不动点逼近算法

罗秋瑾*，邓伟奇#

云南财经大学统计与数学学院，云南 昆明

收稿日期：2023年10月19日；录用日期：2023年11月20日；发布日期：2023年11月28日

摘 要

本文的目的是介绍一可数族中间意义上的渐近非扩张映射公共不动点逼近的最新的算法。通过这种方法，松弛混合迭代算法得以利用并在Banach空间的框架下得出一个强收敛定理。相比于其他作者的方法，该方法的结果可应用性更强。该方法可以应用于深入研究均衡问题系统的一种迭代算法。

关键词

公共不动点，渐近非扩张映射，均衡问题系统

Common Fixed Points Approximation Algorithm for Asymptotically Quasi-ϕ-Nonexpansive Mappings in the Intermediate Sense

Qiujin Luo*, Weiqi Deng#

School of Statistics and Mathematics, Yunnan University of Finance and Economics, Kunming Yunnan

Received: Oct. 19th, 2023; accepted: Nov. 20th, 2023; published: Nov. 28th, 2023

Abstract

The purpose in this paper is to introduce an up-to-date method for the approximation of some common fixed point of a countable family of asymptotically quasi-ϕ-nonexpansive mappings in the intermediate sense, by which a relaxed hybrid iterative algorithm is proposed and a strong con-

*第一作者。
#通讯作者。

文章引用：罗秋瑾，邓伟奇．中间意义上的渐近非扩张映射的公共不动点逼近算法[J]．理论数学，2023，13(11): 3316-3324. DOI: 10.12677/pm.2023.1311344

vergence theorem is established in the framework of Banach spaces. The result is more applicable than those of other authors with related interest. As application, an iterative solution to a system of equilibrium problems is studied.

Keywords

Common Fixed Points, Asymptotically Quasi-ϕ-Nonexpansive Mappings, System of Equilibrium Problems

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

本文中我们假设 E 空间是一个实 Banach 空间，它的对偶空间是 E^*，C 是 E 的非空闭凸子集，$J:E\to 2^{E^*}$ 是有如下定义的标准对偶映射：

$$Jx=\left\{f\in E^*:\langle x,f\rangle=\|x\|^2=\|f\|^2\right\},\forall x\in E$$

后文中，我们用 $F(T)$ 来表示 T 映射中不动点的集合。

定义 1.1 如果 $F(T)\neq\phi$ 且满足如下关系：

$$\limsup\sup\left\{\phi\left(p,T^n x\right)-\phi(p,x):p\in F(T),x\in C\right\}\leq 0 \tag{1.1}$$

则映射 $T:C\to C$ 即为中间意义上的渐近非扩张映射，其中 $\phi:E\times E\to\mathbb{R}^+$ 表示由如下定义的 Lyapunov 泛函方程。

$$\phi(x,y)=\|x\|^2-2\langle x,Jy\rangle+\|y\|^2,\forall x,\ y\in E. \tag{1.2}$$

很显然，由 ϕ 的定义可知：

$$\phi(x,y)=\phi(x,z)+\phi(z,y)+2\langle x-z,Jz-Jy\rangle,\forall x,y,z\in E \tag{1.3}$$

且

$$\left(\|x\|-\|y\|\right)^2\leq\phi(x,y)\leq\left(\|x\|+\|y\|\right)^2,\forall x,y,\in E \tag{1.4}$$

令

$$\varepsilon_n=\max\left\{0,\sup\left\{\phi\left(p,T^n x\right)-\phi(p,x):p\in F(T),x\in C\right\}\right\}$$

很明显，(1.1)可简化为下式

$$\phi\left(p,T^n x\right)\leq\phi(p,x)+\varepsilon_n,\forall n\geq 1,x\in C,p\in F(T) \tag{1.5}$$

其中当 $n\to\infty$ 时 $\varepsilon_n\to 0$。

例 1.1 令 $E=\mathbb{R}^1$，$C=[0,1]$ 且 $T:C\to C$ 是有如下定义的映射：

$$T(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x,x\in\left[0,\frac{1}{2}\right],\\ 0,x\in\left(\frac{1}{2},1\right].\end{cases}$$

由(1.5)可得：

$$\phi\left(p,T^n y\right)\le\phi\left(p,y\right)+\varepsilon_n,\forall n\ge 1,y\in C,p\in F\left(T\right)$$

其中 $\phi\left(x,y\right)=\left|x-y\right|^2$，对于所有 $n\ge 1$，$\varepsilon_n=\frac{1}{4^n}+\frac{1}{2^{n-1}}$。这表明该法定义的 T 映射是中间意义上的渐近非扩张映射。

定义 1.2 如果对于任一 C 的有界子集 K 都有：

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in K}\left\{\left\|T^{n+1}x-T^n x\right\|\right\}=0$$

可称映射 $T:C\to C$ 为渐近正则映射。

2012 年，秦等人[1]对一族中间意义上的渐近非扩张映射使用了下面的杂交投影算法，实现了其在 Banach 空间框架内部极限条件下强收敛。

$$\begin{cases} x_0\in E;C_{1,i}=C;C_1=\bigcap_{i\in\Delta}C_{1,i} \\ x_1=\Pi_{C_1}x_0 \\ C_{n+1},i=\left\{u\in C_{n,i}:\phi\left(x_n,T_i^n x_n\right)\le 2\left\langle x_n-u,Jx_n-JT_i^n x_n\right\rangle+\varepsilon_{n,i}\right\} \\ C_{n+1}=\bigcap_{i\in\Delta}C_{n+1,i} \\ x_{n+1}=\Pi_{C_{n+1}}x_0,\forall n\ge 1 \end{cases} \tag{1.6}$$

其中，$\varepsilon_{n,i}=\max\left\{0,\sup\left\{\phi\left(p,T_i^n x_n\right)-\phi\left(p,x\right):p\in F\right\}\right\}$，$\Delta$ 是一个指标集，$\Pi_{C_{n+1}}$ 是 E 在 C_{n+1} 上的广义投影(详见(2.1))。他们的结论主要丰富了已知相关的之前的结论，这些之前的结论都列在本文给出的参考文献[2]-[8]中。

然而，不难发现，该算法需要计算在给定指标集范围内若干闭凸集合之交集上的广义投影，如果指标集为可数集甚至不可数集，则此算法只能是理论设计，实际上几乎难以实现。因此，他们文章中的理论实践价值并不高。

基于上述研究工作，在本文中，我们引入一可数族中间意义上的渐近非扩张映像，旨在构造其公共不动点的逼近迭代算法时，只需要在每一步迭代过程中计算单个闭凸子集上的广义投影，从而避免了在闭凸子集序列之交集上广义投影的复杂且难以实现的计算，然后得到一个强收敛定理。相比于其他相关研究，本文结论更具应用性。而对于均衡问题系统，其研究思路正好可以转化为有限个中间意义上的渐近非扩张映像可数族的公共不动点的迭代逼近问题，这就为均衡问题系统的解决提供了理论基础。

2. 预备知识

定义 2.1 设 X 是线性空间，X 是 X 的子集，如果对任意 $x,y\in A$，满足 $0<a<1$ 的数 a，$ax+\left(1-a\right)y\in A$ 称 A 是 X 中的凸集。

根据 alber，广义投影 $\Pi_C:E\to C$ 的定义为：

$$\Pi_C=\arg\inf_{y\in C}\phi\left(y,x\right) \tag{2.1}$$

引理 2.1 令 E 为一个光滑的，严格凸和自反的 Banach 空间，C 为 E 的非空闭凸子集，则下列结论成立[9]。

1) 对于所有的 $x\in C$ 且 $y\in E$ 都满足 $\phi\left(x,\Pi_C y\right)+\phi\left(\Pi_C y,y\right)\le\phi\left(x,y\right)$；

2) $z=\Pi_C x\Leftrightarrow\left\langle z-y,Jx-Jz\right\rangle\ge 0,\forall y\in C$；

3) 当且仅当 $x=y$ 时，$x,y\in E$，$\phi(x,y)=0$。

结论 2.1 下述有关 Banach 空间 E 的基本性质可根据 Cioranescu [10]得出：

1) 如果 E 一致光滑，那么 J 在每一个 E 的有界子集内一致连续。

2) 如果 E 是自反且严格凸的，那么 J^{-1} 是范数弱连续。

3) 如果 E 是一个光滑的，严格凸和自反的 Banach 空间，那么正则对偶映射 $J:E\to 2^{E^*}$ 是一对一的。

4) 当且仅当 E^* 是一致凸时，Banach 空间 E 是一直光滑的。

5) 每一个一致凸的 Banach 空间 E 都有 Kadec 性质。也就是说，对于任一序列 $\{x_n\}\subset E$，如果满足 x_n $x\in E$ 且 $\|x_n\|\to\|x\|$，那么当 $n\to\infty$ 时，$x_n\to x$。

引理 2.2 [11] 令 E 为一个严格凸光滑的 Banach 空间，C 为 E 的非空闭凸子集，T 为从 C 到 E 的渐近非扩张映像。则 $F(T)$ 为封闭凸的。

引理 2.3 [12] 该算法方程的唯一整数解为

$$n=i+\frac{(m-1)m}{2},m\geq i,n=1,2,3,\cdots \tag{2.2}$$

其中

$$i=n-\frac{(m-1)m}{2},m=-\left[\frac{1}{2}-\sqrt{2n+\frac{1}{4}}\right],n=1,2,3,\cdots \tag{2.3}$$

这里，我们用 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数。

3. 主要结果

如果当 $n\to\infty$ 时，$x_n\to x$ 且 $T_{n_x}\to y$，我们在 Banach 空间内调用一个算法 T，则 T 是封闭的，且 $T_x\to y$。

定理 3.1 令 E 为一个自反的，严格的凸和光滑的 Banach 空间，故 E 和 E^* 都有 Kadec 性质，C 是 E 和 T_i 的非空闭凸子集，$\{T_i\}_{i=1}^{\infty}:C\times C\to C$ 是一组可数的中间意义上的渐近非扩张映像。令 $\{x_n\}$ 为由下列算法生成的序列：

$$\begin{cases} x_1\in E;C_1=C \\ C_{n+1}=\left\{z\in C_n:\phi\left(x_n,T_{i_n}^{m_n}x_n\right)\leq 2\left\langle x_n-z,Jx_n-JT_{i_n}^{m_n}x_n+\varepsilon_{m_n}^{(i_n)}\right\rangle\right\} \\ x_{n+1}=\prod_{C_{n+1}}x_1,\forall n\geq 1 \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 $\varepsilon_{m_n}^{(i_n)}=\max\left\{0,\sup\left\{\phi\left(p,T_{i_n}^{m_n}x_n\right)-\phi(p,x):p\in F\left(T_{i_n}\right),x\in C\right\}\right\}$；$\prod_{C_{n+1}}$ 是 E 在 C_{n+1} 上的广义投影；i_n 和 m_n 是方程 $n=i+\frac{(m-1)m}{2},m\geq 1,n=1,2,3,\cdots$ 的整数解，也就是说，对于每一个 $n\geq 1$，都有唯一的 i_n 和 m_n，其中

$$i_1=1,i_2=1,i_3=2,i_4=1,i_5=2,i_6=3,i_7=1,i_8=2,\cdots$$

$$m_1=1,m_2=2,m_3=2,m_4=3,m_5=3,m_6=3,m_7=4,m_8=4,\cdots$$

若 $\{T_i\}$ 在 C 上为渐近正则，$F:=\bigcap_{i=1}^{\infty}F(T_i)$ 非空有界，则 $\{x_n\}$ 强收敛于 $\prod_F x_1$。

证明：

(I) F 和 $C_n\,(\forall n\geq 1)$ 都是 C 上的封闭凸子集。

当 $i\geq 1$ 时，$F(T_i)$ 的封闭性取决于 T_i，因此 F 封闭。此外，同理可证[定理 3.1]成立，我们有每一个 F_i 均为凸集，所以 F 即为凸集。

接下来要证明当 $n\ge 1$ 时，C_n 为封闭凸集。由于 $C_1(=C)$ 为封闭凸集，我们可以假设 n 取 $n\ge 1$ 的值时，C_n 是封闭凸集。由 C_{n+1} 得定义可得：$\varphi(z)=2\langle x_n-u,Jx_n-JT_i^n x_n\rangle$ 且 $a=\varepsilon_{m_n}^{(i_n)}-\phi(x_n,T_{i_n}^{m_n}x_n)$ 时

$$C_{n+1}=\{z\in C:\varphi(z)\le a\}\cap C_n$$

该式表明 C_{n+1} 为封闭凸集。

(II) F 是 $\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n$ 的一个子集。

很显然 $F\subset C_1$，假设当 n 取 $n\ge 2$ 的值时，$F\subset C_n$。由公式(1.3)可知，对于任意 $p\in F\subset C$，都有

$$\phi(p,T_{i_n}^{m_n}x_n)=\phi(p,x_n)+\phi(x_n,T_{i_n}^{m_n}x_n)+2\langle p-x_n,Jx_n-JT_{i_n}^{m_n}x_n\rangle \tag{3.2}$$

注意到 $\phi(p,T_{i_n}^{m_n}x_n)\le\phi(p,x_n)+\varepsilon_{m_n}^{(i_n)}$，由公式(3.2)可知

$$\phi(x_n,T_{i_n}^{m_n}x_n)\le 2\langle p-x_n,Jx_n-JT_{i_n}^{m_n}x_n\rangle+\varepsilon_{m_n}^{(i_n)}$$

该式表明 $p\in C_{n+1}$，所以 $F\in C_{n+1}$。

(III) 当 $n\to\infty$ 时，$x_n\to x^*\in C$。

由于 $x_n=\prod_{C_n}x_1$，由引理 2.1 (2)，对于所有 $p\in F$，都有 $\langle x_n-p,Jx_1-x_1\rangle\ge 0$，由引理 2.1 (1)可得，对于任意 $p\in F$ 且 $n\ge 1$ 都有

$$\phi(x_n,x_1)=\phi\left(\prod_{C_n}x_1,x_1\right)\le\phi(p,x_1)-\phi(p,x_n)\le\phi(p,x_1)$$

这表明 $\{\phi(x_n,x_1)\}$ 有界，记为 $\{x_n\}$。由对于所有 $n\ge 1$，$x_n=\prod_{C_n}x_1$，$x_{n+1}=\prod_{C_{n+1}}x_1\in C_{n+1}$，我们有 $\phi(x_n,x_1)\le\phi(x_{n+1},x_1)$，这表明 $\{\phi(x_n,x_1)\}$ 是单调非减的。因此极限 $\lim_{n\to\infty}\phi(x_n,x_1)$ 存在。

由于 E 空间是自反的，那么存在一个 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_1}\}$，当 $i\to\infty$ 时 $x_n\to x^*\in C$，由于 C_n 是封闭凸集且 $C_{n+1}\in C_n$，这表明 C_n 是弱闭的，并且对于每一个 $n\ge 1$ 都有 $x^*\in C_n$。又由于 $x_{n_1}=\prod_{C_{n_1}}x_1$，我们有对于所有 $i\ge 1$，都有

$$\phi(x_{n_1},x_1)\le\phi(x^*,x_1)$$

由于范数 $\|\cdot\|$ 是弱下半连续函数，我们有

$$\begin{aligned}\liminf_{i\to\infty}\phi(x_{n_1},x_1)&=\liminf_{i\to\infty}\left(\|x_{n_i}\|^2-2\langle x_n,Jx_1\rangle+\|x_1\|^2\right)\\&\ge\|x^*\|^2-2\langle x^*,Jx_1\rangle+\|x_1\|^2\\&=\phi(x^*,x_1)\end{aligned}$$

所以

$$\phi(x^*,x_1)\le\liminf_{i\to\infty}\phi(x_{n_i},x_1)\le\limsup_{i\to\infty}\phi(x_{n_i},x_1)\le\phi(x^*,x_1)$$

这表明 $\lim_{i\to\infty}\phi(x_{n_i},x_1)=\phi(x^*,x_1)$。

所以当 $i\to\infty$ 时 $\|x_{n_1}\|\to\|x^*\|$。由于 $x_{n_i}\to x^*$，利用 E 的 Kadec 性质，可得

$$\lim_{i\to\infty}x_{n_1}=x^*$$

由于 $\{\phi(x_n,x_1)\}$ 收敛，又 $\lim_{i\to\infty}\phi(x_{n_i},x_1)=\phi(x^*,x_1)$，故 $\lim_{n\to\infty}\phi(x_n,x_1)=\phi(x^*,x_1)$。如果存在一些 $\{x_n\}$ 的子

序列 $\left\{x_{n_j}\right\}$ 满足当 $j\to\infty$ 时，$x_{n_j}\to y$，那么由引理 2.1 (1)可得

$$\begin{aligned}\phi\left(x^*,y\right)&=\lim_{i,j\to\infty}\phi\left(x_{n_i},x_{n_j}\right)\\&=\lim_{i,j\to\infty}\left(x_{n_i},\Pi_{C_{n_j}}x_1\right)\\&\le\lim_{i,j\to\infty}\left(\phi\left(x_{n_i},x_1\right)-\phi\left(\Pi_{C_{n_j}}x_1,x_1\right)\right)\\&=\lim_{i,j\to\infty}\left(\phi\left(x_{n_i},x_1\right)-\phi\left(x_{n_j},x_1\right)\right)\\&=\phi\left(x^*,x_1\right)-\phi\left(x^*,x_1\right)\\&=0\end{aligned}$$

即 $x^*=y$，所以

$$\lim_{i\to\infty}x_n=x^* \tag{3.3}$$

(IV) x^* 属于集合 F。

对于每一个 $i\ge1$，定义 $\mathbb{N}_i=\left\{k\in\mathbb{N}:k=i+\dfrac{(m-1)m}{2},m\ge i,m\in\mathbb{N}\right\}$。注意到 $T_{i_k}^{m_k}=T_i^{m_k}$ 并且对于每一个 $i\ge1$，当 $k\in\mathbb{N}$ 时都满足 $\varepsilon_{m_k}^{(i_k)}=\varepsilon_{m_k}^{(i)}$。

例如，通过引理 2.4 和 $\mathbb{N}_i$ 的定义，我们有 $\mathbb{N}_i=\{1,2,4,7,11,16,\cdots\}$ 且 $i_1=i_2=i_4=i_7=i_{11}=i_{16}=\cdots=1$。借助于 $x_{n+1}=\Pi_{C_{n+1}}x_1\in C_{n+1}$，我们可得，对于所有的 $k\in\mathbb{N}_i$

$$\phi\left(x_k,T_i^{m_k}x_k\right)\le2\left\langle x_k-x_{k+1},J_{x_k}-JT_i^{m_k}x_k\right\rangle+\varepsilon_{m_k}^{(i)} \tag{3.4}$$

注意到 $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}_i}=\{i,i+1,i+2,\cdots\}$ 故当 $\mathbb{N}_i\ni k\to\infty$ 时，$m_k\uparrow\infty$。

由(3.3)可得

$$\lim_{\mathbb{N}_i\ni k\to\infty}\phi\left(x_k,T_i^{m_k}x_k\right)=0,\forall i\ge1 \tag{3.5}$$

由(1.4)有

$$\lim_{\mathbb{N}_i\ni k\to\infty}\left(\|x_k\|-\left\|T_i^{m_k}x_k\right\|\right)=0,\forall i\ge1$$

再由(3.3)可得

$$\lim_{\mathbb{N}_i\ni k\to\infty}\left\|T_i^{m_k}x_k\right\|=\left\|x^*\right\|,\forall i\ge1 \tag{3.6}$$

故

$$\lim_{\mathbb{N}_i\ni k\to\infty}\left\|JT_i^{m_k}x_k\right\|=\left\|Jx^*\right\|,\forall i\ge1 \tag{3.7}$$

这表明对于所有 $i\ge1$，$\left\{JT_i^{m_k}x_k\right\}_{k\in\mathbb{N}_i}$ 都有界。注意到 E 和 E^* 都是自反的，我们假设当 $\mathbb{N}_i\ni k\to\infty$ 时，$JT_i^{m_k}x_k\rightharpoonup f\in E^*$。由 E 的自反性我们得知存在一个元素 $y\in E$，令 $J_y=f$，然后我们有

$$\begin{aligned}\phi\left(x_k,T_i^{m_k}x_k\right)&=\|x_k\|^2-2\left\langle x_k,JT_i^{m_k}x_k\right\rangle+\left\|T_i^{m_k}x_k\right\|^2\\&=\|x_k\|^2-2\left\langle x_k,JT_i^{m_k}x_k\right\rangle+\left\|T_i^{m_k}x_k\right\|^2\end{aligned}$$

方程两侧同时取极限 $\liminf_{\mathbb{N}_i \ni k\to\infty}$ 可得

$$\begin{aligned}0 &\ge \left\|x^*\right\|^2 - 2\left\langle x^*, f\right\rangle + \|f\|^2 \\ &= \left\|x^*\right\|^2 - 2\left\langle x^*, J_y\right\rangle + \left\|J_y\right\|^2 \\ &= \left\|x^*\right\|^2 - 2\left\langle x^*, J_y\right\rangle + \|y\|^2 \\ &= \phi\left(x^*, y\right)\end{aligned}$$

即 $x^* = y$，也即 $f = J_{x^2}$。这表明当 $\mathbb{N}_i \ni k\to\infty$ 时，$JT_i^{m_k}x_k \rightharpoonup J_{x^2} \in E^*$ 在 E^* 中利用 Kadec 性质，由(3.7)可得 $\lim_{\mathbb{N}_i \ni k\to\infty} JT_i^{m_k}x_k = J_{x^2}$。由于 $J^{-1}: E^* \to E$ 是次连续型，故当 $\mathbb{N}_i \ni k\to\infty\mathbb{N}_i$ 时，$T_i^{m_k}x_k \rightharpoonup x^*$ 由(3.6)和 Kadec 性质可得

$$\lim_{\mathbb{N}_i \ni k\to\infty} T_i^{(m_k)}x_k = x^*, \forall i\ge 1 \tag{3.8}$$

又注意到 $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}_i} = \{i, i+1, i+2, \cdots\}$，对于每一个 $i\ge1$ 当 $k\in\mathbb{N}$ 时，$m_{k+1}-1 = m_k$，然后我们有

$$\begin{aligned}\left\|T_i^{m_{k+1}}x_k - x^*\right\| &\le \left\|T_i^{m_{k+1}}x_k - T_i^{m_k}x_k\right\| + \left\|T_i^{m_k}x_k - x_k\right\| \\ &= \left\|T_i^{m_{k+1}}x_k - T_i^{m_{k+1}-1}x_k\right\| + \left\|T_i^{m_k}x_k - x_k\right\|\end{aligned}$$

又每个 T_i 的渐近正则的，由(3.8)可得

$$\lim_{\mathbb{N}_i \ni k\to\infty}\left\|T_i^{m_{k+1}}x_k - x^*\right\| = 0, \forall i\ge 1$$

即

$$\lim_{\mathbb{N}_i \ni k\to\infty} T_i\left(T_i^{m_k}x_k\right) = x^*, \forall i\ge 1 \tag{3.9}$$

显然，T_i 是自闭的，由(3.8)可得 $T_i x^* = x^*$，即对于每一个 $i\ge1$，都有 $x^*\in F\left(T_i\right)$，因此 $x^*\in F$。

(V) $x^* = \prod_F x_1$，所以当 $n\to\infty$ 时，$x_n \to \prod_F x_1$

令 $u = \prod_F x_1$。因为 $u\in F\subset C_n$ 且 $x_n = \prod_{C_n} x_1$，我们有，$\phi\left(x_n, x_1\right) \le \phi\left(u, x_1\right), \forall n\ge1$，

于是

$$\phi\left(x^*, x_1\right) = \lim_{n\to\infty}\phi\left(x_n, x_1\right) \le \phi\left(u, x_1\right) \tag{3.10}$$

这表明因为 $u = \prod_F x_1$ 故 $x^* = u$，所以当 $n\to\infty$ 时，$x_n \to x^* = \prod_F x_1$。证毕。

注 定理 3.1 中的迭代算法可称为松弛混合迭代算法，其工作原理的关键之处在于以下两点，一是只需要在每一步迭代过程中计算单个闭凸子集上的广义投影，从而成功地避免了在闭凸子集序列之交集上广义投影的复杂且难以实现的计算；二是引入一类具体的指标选取方法使得可数族中间意义上的渐近非扩张映像的每一个算子都能在迭代过程中不断重复，从而使迭代序列得以强收敛到该可数族非线性算子的公共不动点

4. 应用

令 E 为严格的凸和光滑的 Banach 空间，C 是 E 的一个非空闭凸子集。再令 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}: C\times C\to\mathbb{R}$ 是一个双重函数可数族，且满足条件：对于每一个 $i\ge1$

(A_1) $f_i(x,x) = 0$

(A_2) f_i 是单调的，且 $f_i(x,y) + f_i(y,x) \le 0$

(A3) $\limsup_{t\downarrow 0} f_i\left(x+t\left(z-x\right),y\right)\le f_i\left(x,y\right)$

(A4) 映射 $y\to f_i\left(x,y\right)$ 是凸下半连续函数。

对于 $\left\{f_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ 的平衡问题系统即寻找一个 $x^*\in C$ 使得

$$f_i\left(x^*,y\right)\ge 0,\forall y\in C,i\ge 1$$

该通解可以表示为 $EP:=\bigcap_{i=1}^{\infty}EP\left(f_i\right)$，其中 $EP\left(f_i\right)$ 表示对 $f_i\left(i=1,2,\cdots\right)$ 时均衡问题的解。在结论 4.1 中，我们会将这样一个均衡问题系统简化为有限个非线性映射族的不动点逼近问题。

令 $r>0$，定义如下一个有限映射族 $\left\{T_i\right\}_{i=1}^{\infty}:C\times C\to C$

$$T_i\left(x\right)=\left\{z\in C:f_i\left(z,y\right)+\frac{1}{r}\left\langle y-z,J_z-J_x\right\rangle\right\},\forall i\ge 1 \tag{4.1}$$

由 E. Blum 和 W. Oettli 的文章[13]可知：

1) $\left\{T_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ 是一组单值映像。

2) $\left\{T_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ 是一组封闭的渐近非扩张映像。

$$\phi\left(p,T_ix\right)\le\phi\left(p,x\right),\forall x\in C,p\in F\left(T_i\right)$$

3) 令 $F:=\bigcap_{i=1}^{\infty}F\left(T_i\right)=EP$。

现在，我们有如下结论。

结论 4.1. 令 E 为一个自反的，严格的凸和光滑的 Banach 空间，故 E 和 E^* 有 Kadec 性质。C 是 E 的非空闭凸子集，$\left\{T_i\right\}_{i=1}^{\infty}:C\times C\to C$ 是一个(4.1)定义的一组可数映射。令 $\left\{x_n\right\}$ 由如下生成

$$\begin{cases}x_1\in E;C_1=C\\ C_{n+1}=\left\{z\in C_n:\phi\left(x_n,T_{i_n}x_n\right)\le 2\left\langle x_n-z,Jx_n-JT_{i_n}x_n\right\rangle\right\}\\ x_{n+1}=\prod_{C_{n+1}}x_1,\forall n\ge 1\end{cases} \tag{4.2}$$

其中 $\prod_{C_{n+1}}$ 是 E 在 C_{n+1} 上的广义投影；i_n 是方程 $n=\dfrac{\left(m-1\right)m}{2}\left(m\ge i,n=1,2,\cdots\right)$ 的整数解。

5. 总结

本文引入一可数族中间意义上的渐近非扩张映射公共不动点迭代逼近的最新的算法，此算法基于一类具体的指标选取思想，使得松弛混合迭代算法在 Banach 空间的背景下构造出的一个迭代序列得以强收敛到该可数族非线性算子公共不动点。相比于其他作者的方法，该方法的结果可应用性更强。该方法可以应用于深入研究均衡问题系统的一种迭代算法。笔者未来研究方向拟将可数族中间意义上的渐近非扩张映射推广到不可数族非线性算子的情形。

基金项目

云南财经大学科学研究基金项目资助(2023C08)；云南财经大学《高等数学(理工类)》课程思政示范课。

参考文献

[1] Qin, X. and Wang, L. (2012) On Asymptotically Quasi-ϕ-Nonexpansive Mappings in the Intermediate Sense. *Abstract and Applied Analysis*, **2012**, Article ID: 636217. https://doi.org/10.1155/2012/636217

[2] Zhou, H., Gao, G. and Tan, B. (2010) Convergence Theorems of a Modified Hybrid Algorithm for a Family of Qua-

si-ϕ-Asymptotically Nonexpansive Mappings. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **32**, 453-464. https://doi.org/10.1007/s12190-009-0263-4

[3] Qin, X. and Agarwal, R.P. (2010) Shrinking Projection Methods for a Pair of Asymptotically Quasi-ϕ-Nonexpansive Mappings. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **31**, 1072-1089. https://doi.org/10.1080/01630563.2010.501643

[4] Qin, X., Huang, S. and Wang, T. (2011) On the Convergence of Hybrid Projection Algorithms for Asymptotically Quasi-ϕ-Nonexpansive Mappings. *Computers and Mathematics with Applications*, **61**, 851-859. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2010.12.033

[5] Qin, X., Cho, Y.J. and Kang, S.M. (2009) Convergence Theorems of Common Elements for Equilibrium Problems and Fixed Point Problems in Banach Spaces. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **225**, 20-30. https://doi.org/10.1016/j.cam.2008.06.011

[6] Qin, X., Cho, S.Y. and Kang, S.M. (2010) On Hybrid Projection Methods for Asymptotically Quasi-ϕ-Nonexpansive Mappings. *Applied Mathematics and Computation*, **215**, 3874-3883. https://doi.org/10.1016/j.amc.2009.11.031

[7] Qin, X., Cho, S.Y. and Kang, S.M. (2010) Strong Convergence of Shrinking Projection Methods for Quasi-ϕ-Nonexpansive Mappings and Equilibrium Problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **234**, 750-760. https://doi.org/10.1016/j.cam.2010.01.015

[8] Qin, X., Cho, Y.J., Kang, S.M. and Zhou, H. (2009) Convergence of a Modified Halpern-Type Iteration Algorithm for Quasi-ϕ-Nonexpansive Mappings. *Applied Mathematics Letters*, **22**, 1051-1055. https://doi.org/10.1016/j.aml.2009.01.015

[9] Alber, Y.I. (1996) Metric and Generalized Projection Operators in Banach Spaces: Properties and Applications. In: Kartosator, A.G., Ed., *Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type*, Marcel Dekker, New York, 15-50.

[10] Cioranescu, I. (1990) Geometry of Banach Spaces, Duality Mappings and Nonlinear Problems. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-009-2121-4

[11] Nilsrakoo, W. and Saejung, S. (2008) Strong Convergence to Common Fixed Points of Countable Relatively Quasi-Nonexpansive Mappings. *Fixed Point Theory and Algorithms for Sciences and Engineering*, **19**, Article ID: 312454. https://doi.org/10.1155/2008/312454

[12] Deng, W.-Q. and Bai, P. (2013) An Implicit Iteration Process for Common Fixed Points of Two Infinite Families of Asymptotically Nonexpansive Mappings in Banach Spaces. *Journal of Applied Mathematics*, **2013**, Article ID: 602582. https://doi.org/10.1155/2013/602582

[13] Blum, E. and Oettli, W. (1994) From Optimization and Variational Inequalities to Equilibrium Problems. *The Mathematics Student*, **63**, 123-145.